



Τ.Ε.Ι. Στερεάς Ελλάδας
Σχολή Διοίκησης και Οικονομίας
Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής

Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας

Δρ Αναστάσιος Μαγκούτας
Αναπληρωτής Καθηγητής
Εφαρμοσμένης Οικονομικής των Επιχειρήσεων
Τηλ. 2228099582, e-mail: amag@teiste.gr

Γραφείο Β215-Α,
Ώρες Γραφείου:
Τετάρτη 11:00-13:00 & 15:00-16:00
Πέμπτη 10:00-12:00

Περιεχόμενα

- Δικτυωτή Ανάλυση
- Βασικά συστατικά στοιχεία δικτύων
- Το πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής
- Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου
- Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

Οι διαφάνειες βασίζονται στο βιβλίο των Γ. Οικονόμου, Α. Γεωργίου, Ποσοτική Ανάλυση για τη Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων, Τόμος Β, Εκδ. Μπένου

Δικτυωτή Ανάλυση

Στόχος της ενότητας η παρουσίαση τεχνικών τις οποίες χρησιμοποιούμε για να αναπαραστήσουμε και να επιλύσουμε διοικητικά προβλήματα που σχετίζονται με τη σχεδίαση συστημάτων μεταφοράς και επικοινωνίας και γενικότερα με τον εντοπισμό του βέλτιστου τρόπου σύνδεσης δύο ή περισσότερων σημείων, μέσω εναλλακτικών καναλιών διασύνδεσης.

Ενότητες:

- Βασικά δομικά στοιχεία των δικτύων
- Πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής
- Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου
- Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

Βασικά Συστατικά Στοιχεία Δικτύων

Ένα δίκτυο αποτελείται από ένα σύνολο **κόμβων (nodes)** που παριστάνονται με κύκλους, οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με γραμμές που τις ονομάζουμε **ακμές (arcs, branches)**.

Μεταξύ κόμβων και διαμέσου των ακμών μπορούν να «ρέουν» διάφορα υλικά.

Παραδείγματα δικτύων:

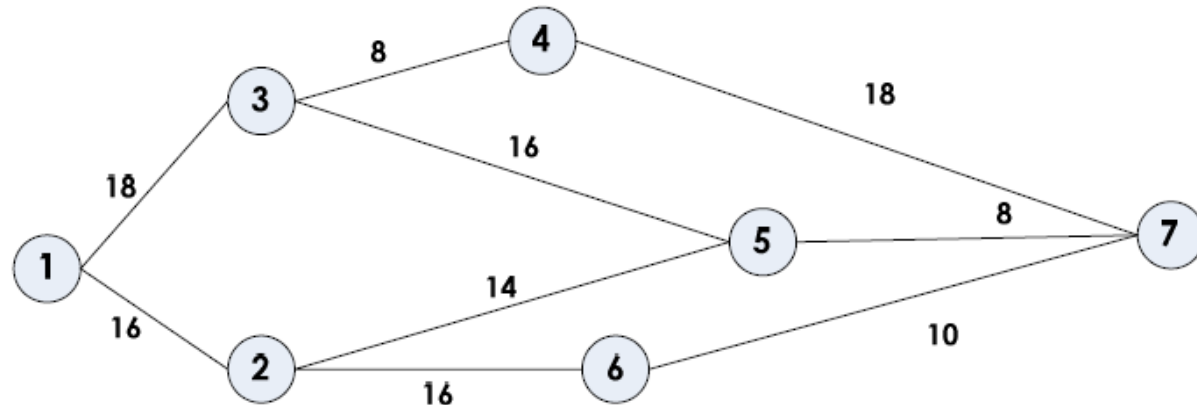
- Δίκτυα αυτοκινητοδρόμων
- Δίκτυα υδροδότησης
- Δίκτυα τηλεπικοινωνιών
- Δίκτυα ηλεκτρονικών υπολογιστών

Βασικά Συστατικά Στοιχεία Δικτύων

- Οι **κόμβοι** παριστάνουν τα σημεία τομής των ακμών: διασταυρώσεις δρόμων, πόλεις, τηλεπικοινωνιακά κέντρα, δορυφόροι, κ.α.
- Οι **ακμές** μπορεί να είναι δρόμοι, αεροδιάδρομοι, καλώδια ροής δεδομένων, κ.α.
- Κάθε κόμβος συμβολίζεται με έναν αριθμό ή γράμμα ή λέξη. Τους αριθμούς αυτούς μπορούμε να τους χρησιμοποιήσουμε για το συμβολισμό των ακμών.

Π.χ. ο κόμβος 2 συνδέεται άμεσα με τον κόμβο 5 και η σύνδεση επιτυγχάνεται μέσω της ακμής 2-5».

- Κάθε ακμή που συνδέει δύο κόμβους συνοδεύεται από έναν αριθμό, ο οποίος μπορεί να παριστάνει το μήκος της ακμής αυτής, το χρόνο που απαιτείται, το κόστος της ακμής κ.α.



Βασικά Συστατικά Στοιχεία Δικτύων

Είδη ακμών

Μη προσανατολισμένες: επιτρέπεται η ροή και προς τις δύο κατευθύνσεις.

Προσανατολισμένες: επιτρέπεται η ροή μόνο προς μίας κατεύθυνση. Αυτό γίνεται με τη χρήση βελών που δείχνουν τη συγκεκριμένη κατεύθυνση.

Μία ακολουθία συνεχιζόμενων ακμών ορίζει μία διαδρομή ή ένα δρόμο ή ένα μονοπάτι (path).

Ένα μονοπάτι μπορεί να αποτελεί ένα κύκλο, όταν μπορούμε να επιστρέψουμε στον κόμβο από τον οποίο ξεκινήσαμε, χωρίς να περάσουμε από την ίδια ακμή.

Μονοπάτι: 1-2-5

Κύκλος: 1-2-5-3-1

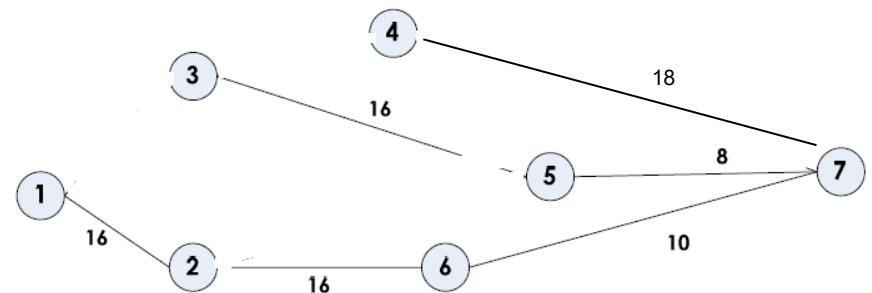
Βασικά Συστατικά Στοιχεία Δικτύων

Όταν για ένα υποσύνολο κόμβων και ακμών του δικτύου, δηλαδή για ένα υποδίκτυο (ή για ολόκληρο το δίκτυο), υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που μπορεί να συνδέσει κάθε δυάδα κόμβων του υποδικτύου (ή του δικτύου), τότε έχουμε ένα **συνεκτικό** υποδίκτυο (ή δίκτυο).

Όταν το δίκτυο δεν περιέχει κύκλους, τότε λέμε ότι ένα ένα **δέντρο**.

Όταν ένα δέντρο συνδέει όλους τους κόμβους ενός δικτύου, τότε ονομάζεται **ζευγνύον** δέντρο.

Το δίκτυο του παραδείγματος είναι συνεκτικό επειδή 'όλοι οι κόμβοι επικοινωνούν μεταξύ τους άμεσα ή έμμεσα. Αν αφαιρέσουμε τις ακμές 1-3, 3-4, και 2-5 έχουμε ένα συνεκτικό δίκτυο που είναι δέντρο.



Βασικά Συστατικά Στοιχεία Δικτύων

Παραδείγματα δικτυακών συστημάτων

Σύστημα	Κόμβοι	Ακμές	Τιμή Ακμών	Ροή
Συγκοινωνιακά δίκτυα	Πόλεις, διασταυρώσεις, σταθμοί επιβατών, στάσεις	Δρόμοι, αεροδιάδρομοι, γραμμές τρένων, κ.λπ.	Απόσταση, χρόνος ταξιδιού, κόστος	Οχήματα, μέσα μεταφοράς
Γραμμές παραγωγής	Σταθμοί επεξεργασίας	Ταινίες μεταφοράς	Χρόνος/κόστος μεταφοράς	Ημικατεργασμένα προϊόντα, εργασίες
Δίκτυα ηλεκτρονικής επικοινωνίας	Υπολογιστές, εκτυπωτές, άλλοι πόροι	Καλώδια, συνδέσεις ασύρματης επικοινωνίας	Μήκος καλωδίου, ύπαρξη σύνδεσης (ασύρματη), κόστος	Δεδομένα
Δίκτυα υδροδότησης ή άρδευσης	Σημεία κατανάλωσης νερού, αντλιοστάσια	Σωληνώσεις	Μήκος, κόστος	Νερό



Το πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής

Το πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής

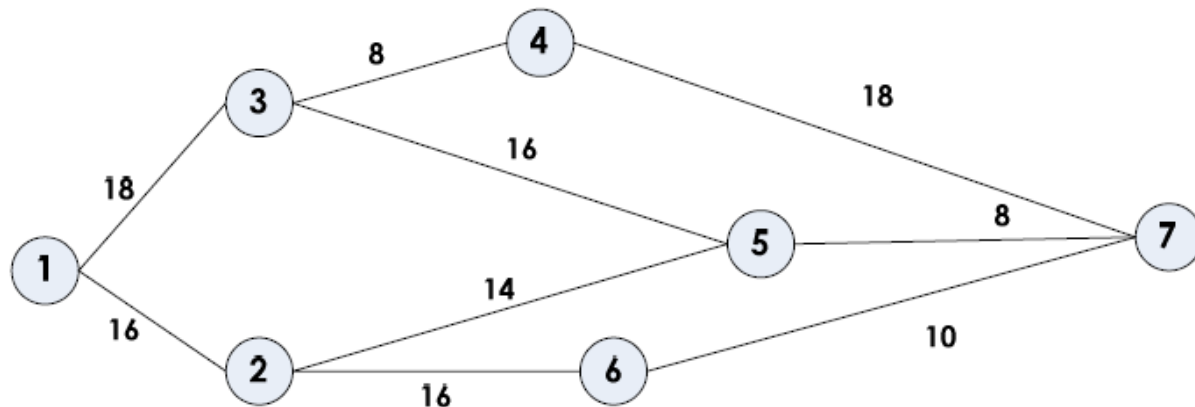
- ◉ Στόχος στο πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής είναι ο προσδιορισμός της διαδρομής με το μικρότερο συνολικό μήκος ακμών από μια αφετηρία προς έναν κόμβο προορισμού.

Το πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μια εταιρεία δραστηριοποιείται στο εμπόριο λαχανικών στην περιοχή της Μακεδονίας. Πρόσφατα έγινε ανάδοχος εταιρεία σε διεθνή διαγωνισμό για την προμήθεια του Αριστοτέλειο Νοσοκομείου Θεσσαλονίκης. Δυστυχώς η εταιρεία δεν διαθέτει τοπικό κέντρο διανομής, οπότε τα προϊόντα πρέπει να μεταφέρονται από την έδρα της (κόμβος 1), στην Θεσσαλονίκη, η οποία παριστάνεται με τον κόμβο 7. Οι υπόλοιποι κόμβοι του δικτύου είναι ενδιάμεσοι σταθμοί ή διασταυρώσεις και οι ακμές είναι οι δυνατές διαδρομές με τις οποίες συνδέονται η έδρα της εταιρείας με την Θεσσαλονίκη. Οι αριθμοί σε κάθε ακμή εκφράζουν τις αποστάσεις σε χιλιάδες χιλιόμετρα.

Ζητάμε να προσδιορίσουμε την ελάχιστη απόσταση από τον κόμβο 1 στο κόμβο 7 η οποία έχει το ελάχιστο συνολικό μήκος.



Το πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής

Η τεχνική στηρίζεται στο γεγονός ότι σε κάθε επανάληψη μπορεί να βρεθεί τουλάχιστον ένας κόμβος, για τον οποίο η διαδρομή από την αφετηρία μέχρι αυτόν δεν μπορεί να βελτιωθεί περαιτέρω, οπότε ο κόμβος ονομάζεται **μόνιμος ή λυμένος (permanent)**.

Στη συνέχεια εξετάζουμε αν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο κόμβος αυτός ως **ενδιάμεσος (temporary)**, βελτιώνοντας τις προσωρινές διαδρομές, που έχουν βρεθεί για τους υπόλοιπους κόμβους του δικτύου συμπεριλαμβανομένου και του προορισμού.

Το πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής

Μόνιμος Κόμβος: Ο κόμβος για τον οποίο η διαδρομή από την αφετηρία μέχρι αυτόν δεν μπορεί να βελτιωθεί

Βήμα 1: Ξεκινάμε από την ΑΦΕΤΗΡΙΑ. Επειδή δεν υπάρχει συντομότερη διαδρομή από την αφετηρία στον εαυτό της ο κόμβος αυτός είναι μόνιμος.

Βήμα 2: Προδριορίζουμε τους κόμβους συνδέονται άμεσα με την αφετηρία. Επιλέγουμε τον ΠΛΗΣΙΕΣΤΕΡΟ κόμβο προς την αφετηρία. Ο νέος αυτός κόμβος γίνεται ΜΟΝΙΜΟΣ

Βήμα 3: Εντοπίζουμε τους κόμβους που συνδέονται άμεσα με τουλάχιστον έναν από τους κόμβους του συνόλου των μόνιμων κόμβων.

Σημειώνουμε το μήκος των διαδρομών από την ΑΦΕΤΗΡΙΑ προς τους κόμβους αυτούς.

Επιλέγουμε τον κόμβο με την συντομότερη διαδρομή

Σε περίπτωση ισοβάθμισης διαλέγουμε ΑΥΘΑΙΡΕΤΑ

Βήμα 4: Συνεχίζουμε μέχρι να γίνουν ΟΛΟΙ οι κόμβοι μόνιμοι

Το πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής

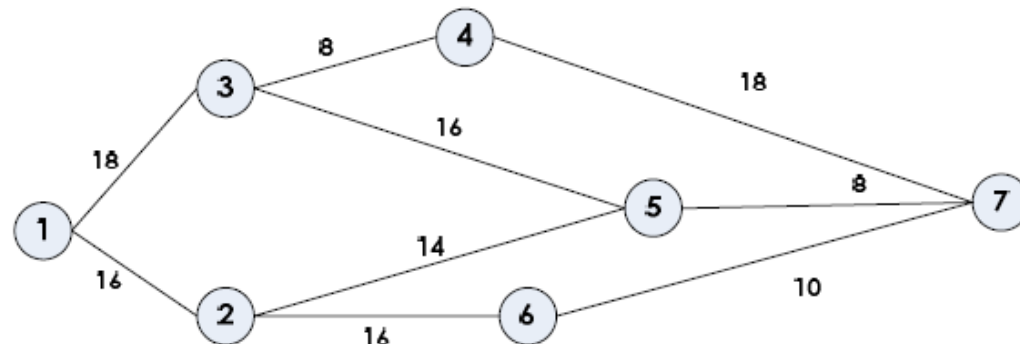
ΠΑΡ'ΑΔΕΙΓΜΑ

⦿ ΑΦΕΤΗΡΙΑ= κόμβος 1

Ο κόμβος 1 είναι ο πρώτος **μόνιμος** κόμβος

Αυτός ο κόμβος συνδέεται άμεσα με τους κόμβους 2
(απόσταση 16) και 3 (απόσταση 18)

Άρα ο 2 ο επόμενος μόνιμος κόμβος

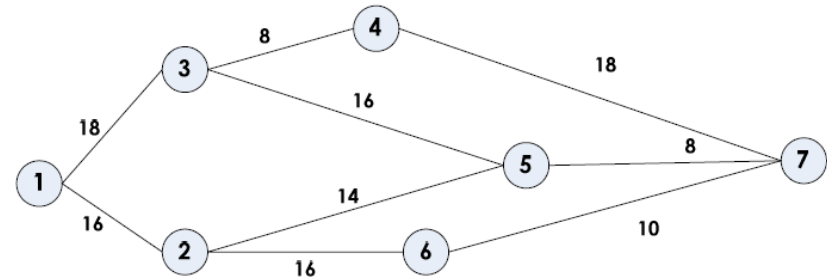


Επανάληψη	Σύνολο μόνιμων Κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος Διαδρομής	Μόνιμος Κόμβος	Συνολικό μήκος ελάχιστης διαδρομής
0	$\Lambda = \{1\} + \{2\}$	1-2	16	2	16
		1-3	18		

Το πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μόνιμοι είναι οι κόμβοι 1 και 2.



Ο κόμβος 1 συνδέεται με το 3 (απόσταση 18)

Ο κόμβος 2 με τον 5 (απόσταση $14+16=30$) και τον 6 (απόσταση $16+16=32$)

ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ Η ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΜΕΤΡΙΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΦΕΤΗΡΙΑ

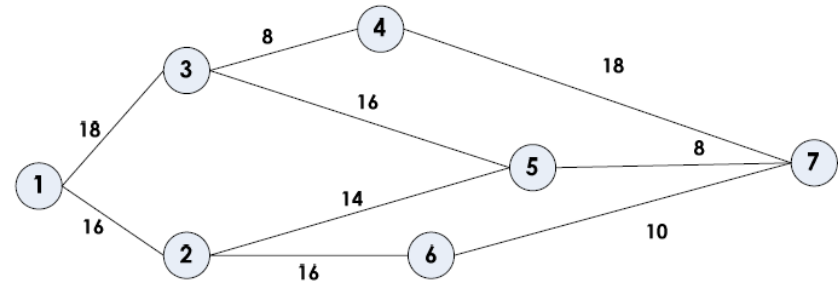
Άρα επόμενος μόνιμος κόμβος ο 3

Επανάληψη	Σύνολο μόνιμων Κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος Διαδρομής	Μόνιμος Κόμβος	Συνολικό μήκος ελάχιστης διαδρομής
1	$\Lambda=\{1,2\}+\{3\}$	1-3	18	3	18
		2-5	30		
		2-6	32		

Το πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μόνιμοι είναι οι κόμβοι 1, 2 και 3.



Ο κόμβος 2 συνδέεται με τον 5 (απόσταση $14+16=30$) και τον 6 (απόσταση $16+16=32$)

Ο κόμβος 3 συνδέεται με τον 4 (απόσταση $8+18=26$)

ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ Η ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΜΕΤΡΙΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΦΕΤΗΡΙΑ

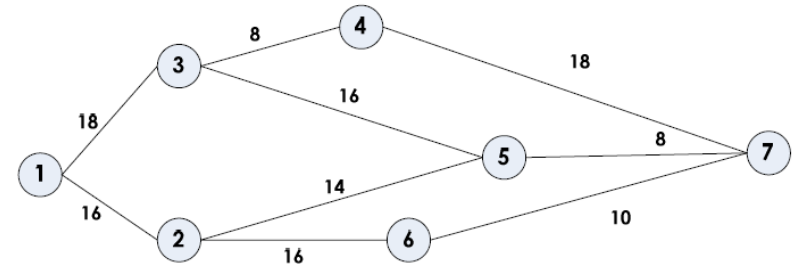
Άρα επόμενος μόνιμος κόμβος ο 4

Επανάληψη	Σύνολο μόνιμων Κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος Διαδρομής	Μόνιμος Κόμβος	Συνολικό μήκος ελάχιστης διαδρομής
2	$\Lambda=\{1,2,3\}+\{4\}$	3-4	26	4	26
		2-5	30		
		2-6	32		

Το πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μόνιμοι είναι οι κόμβοι 1, 2, 3 και 4.



Ο κόμβος 2 συνδέεται με τον 5 (απόσταση $14+16=30$) και τον 6 (απόσταση $16+16=32$)

Ο κόμβος 4 συνδέεται με τον 7 (απόσταση $18+26=44$)

ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ Η ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΜΕΤΡΙΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΦΕΤΗΡΙΑ

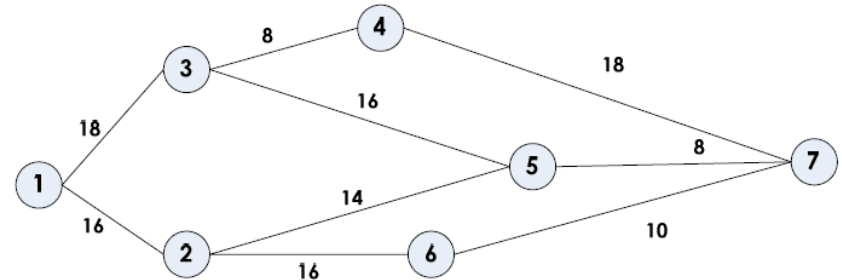
Άρα επόμενος μόνιμος κόμβος ο 5

Επανάληψη	Σύνολο μόνιμων Κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος Διαδρομής	Μόνιμος Κόμβος	Συνολικό μήκος ελάχιστης διαδρομής
3	$\Lambda = \{1, 2, 3, 4\} + \{5\}$	4-7	44	5	30
		2-5	30		
		2-6	32		

Το πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής

ΠΑΡ'ΑΔΕΙΓΜΑ

Μόνιμοι είναι οι κόμβοι 1, 2, 3, 4 και 5



Ο κόμβος 2 συνδέεται με τον 6 (απόσταση $16+16=32$)

Ο κόμβος 5 συνδέεται με τον 7 (απόσταση $8+30=38$)

ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ Η ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΜΕΤΡΙΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΦΕΤΗΡΙΑ

Άρα επόμενος μόνιμος κόμβος ο 6

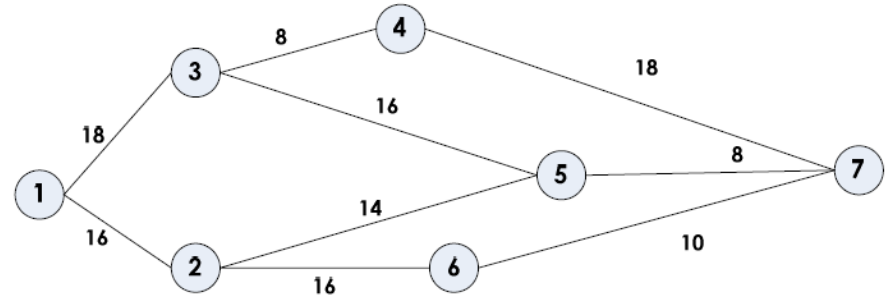
Επανάληψη	Σύνολο μόνιμων Κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος Διαδρομής	Μόνιμος Κόμβος	Συνολικό μήκος ελάχιστης διαδρομής
4	$\Lambda = \{1, 2, 3, 4, 5\} + \{6\}$	5-7	38	6	32
		2-6	32		

Το πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής

ΠΑΡ'ΑΔΕΙΓΜΑ

Μόνιμοι είναι οι κόμβοι 1, 2, 3, 4, 5 και 6

Ο κόμβος 5 συνδέεται με τον 7 (απόσταση $8+30=38$)



ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ Η ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΜΕΤΡΙΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΦΕΤΗΡΙΑ

Άρα επόμενος μόνιμος κόμβος ο 7

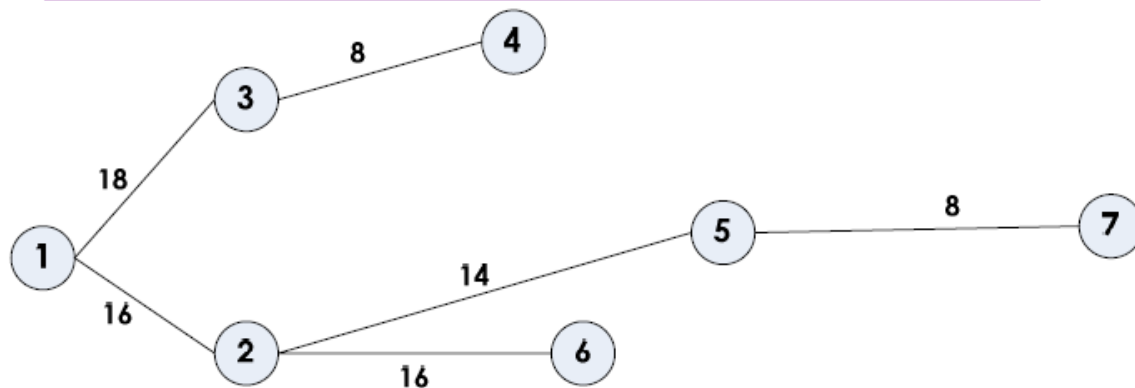
Επανάληψη	Σύνολο μόνιμων Κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος Διαδρομής	Μόνιμος Κόμβος	Συνολικό μήκος ελάχιστης διαδρομής
5	$\Lambda = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} + \{7\}$	5-7	38	7	38


Το πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής

ΠΑΡ'ΑΔΕΙΓΜΑ

Συνοπτικά αποτελέσματα άριστης λύσης

Κόμβος	Άμεσα προηγούμενος καλύτερος κόμβος	Βέλτιστη διαδρομή	Ελάχιστη αποσταση
1	-	-	-
2	1	1-2	16
3	1	1-3	18
4	3	1-3-4	26
5	2	1-2-5	30
6	2	1-2-6	32
7	5	1-2-5-7	38





Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου

Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου

- ◉ Σε πολλές περιπτώσεις δικτύων μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε το δίκτυο ως ένα σύνολο κόμβων που πρέπει όλοι να επικοινωνούν μεταξύ τους.
- ◉ Στόχος είναι όλοι οι κόμβοι να επικοινωνούν μεταξύ τους είτε άμεσα είτε έμμεσα, δηλαδή να συνδέονται μέσω ενός συνόλου ακμών, των οποίων η συνολική απόσταση να είναι η ελάχιστη δυνατή.

Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου

ΠΑΡ'ΑΔΕΙΓΜΑ 1

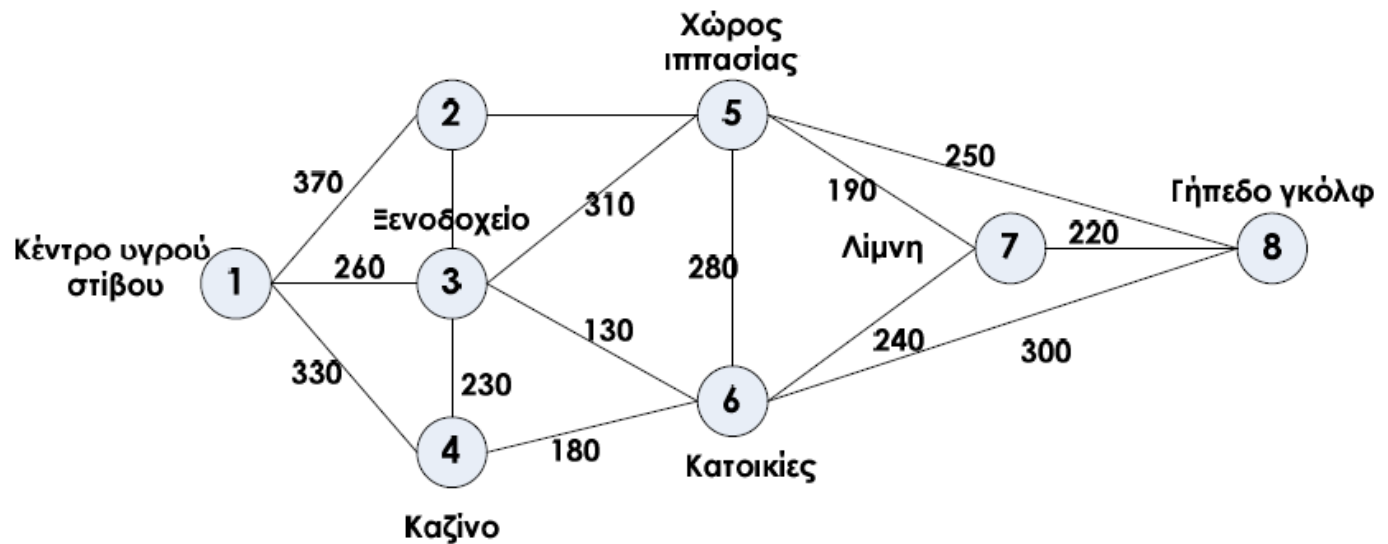
Ο Γιώργος κληρονόμησε από τον πατέρα του μια έκταση 10 στρεμμάτων και αποφάσισε να ασχοληθεί με την τουριστική αξιοποίησή της. Μετά από συνεργασία με μια συμβουλευτική εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει ένα ξενοδοχείο με γήπεδα αντισφαίρισης, κέντρο υγρού στίβου, χώρο ιππασίας, τεχνητή λίμνη, γήπεδο γκόλφ, καζίνο και έναν συγκρότημα κατοικιών. Ο Γιώργος κατέθεσε το σχέδιο κατασκευής στο Υπουργείο για την έγκριση ενός ενιαίου συστήματος μονοπατιών διασύνδεσης όλων αυτών των εγκαταστάσεων. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται τα πιθανά μονοπάτια διασύνδεσης. Υποθέτουμε ότι οι αποστάσεις είναι σε μέτρα.

Ο Γιώργος ενδιαφέρεται να χρησιμοποιήσει εκείνες τις ακμές, φτιάχνοντας τα αντίστοιχα μονοπάτια, τα οποία θα επιτρέπουν την επικοινωνία μεταξύ όλων των κόμβων ταυτόχρονα, όχι απαραίτητα με το συντομότερο τρόπο ανά δύο, αλλά με το μικρότερο συνολικό μήκος ακμών.

Η ροή επιτρέπεται και προς τις 2 κατευθύνσεις

Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1



Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΖΕΥΓΝΥΟΝΤΟΣ ΔΕΝΤΡΟΥ

Βήμα 1: Επιλέγουμε **αυθαίρετα** έναν οποιοδήποτε κόμβο του δικτύου. Ο κόμβος αυτός ΕΙΣΕΡΧΕΤΑΙ πρώτος στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων.

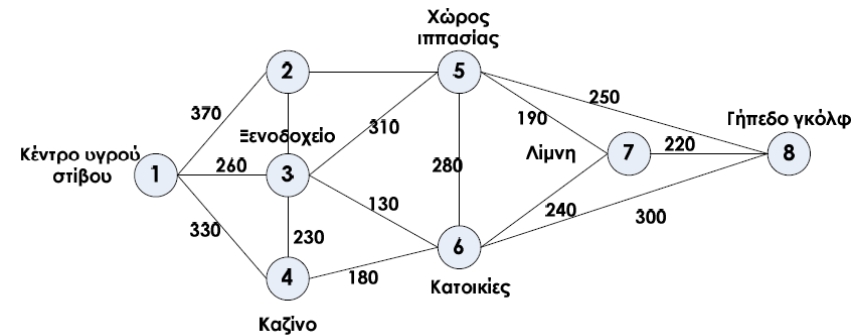
Βήμα 2: Συνδέουμε τον προηγούμενο κόμβο με τον κόμβο που βρίσκεται **ΠΙΟ ΚΟΝΤΑ** του.

Βήμα 3: Βρίσκουμε τον κόμβο που βρίσκεται πιο κοντά σε κάποιον από τους συνδεδεμένους κόμβους και τον συνδέουμε.
Σε περίπτωση ισοβάθμισης διαλέγουμε **ΑΥΘΑΙΡΕΤΑ**

Βήμα 4: Συνεχίζουμε μέχρι να συδέσουμε **ΟΛΟΥΣ** τους κομβούς

Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου

ΠΑΡ'ΑΔΕΙΓΜΑ 1:



- Επιλέγουμε αυθαίρετα τον κόμβο 1

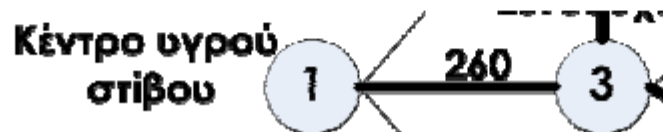
Ο κόμβος 1 συνδέεται με τους

2 (απόσταση 370)

3 (απόσταση 260)

4 (απόσταση 330)

ΑΡΑ επιλέγουμε τον κόμβο 3 να συνδεθεί με τον κόμβο 1 (έντονη γραμμή)



Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου

ΠΑΡ'ΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Οι κόμβοι 1 και 3 συνδέονται με

1-2 (απόσταση 370)

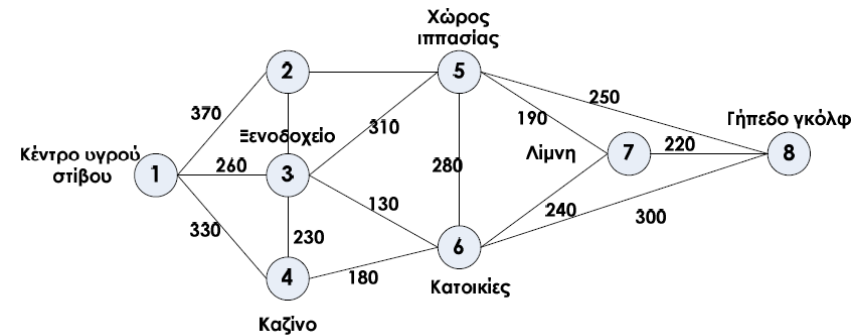
1-4 (απόσταση 330)

3-2 (απόσταση 180)

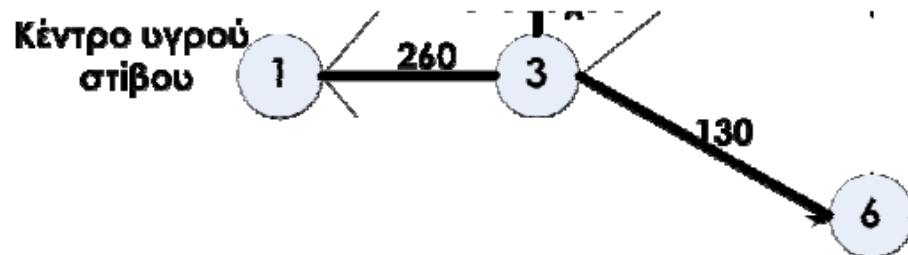
3-4 (απόσταση 230)

3-5 (απόσταση 310)

3-6 (απόσταση 130)



ΑΡΑ επιλέγουμε τον κόμβο 6 να συνδεθεί στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων



Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Οι κόμβοι 1, 3 και 6 συνδέονται με

1-2 (απόσταση 370)

1-4 (απόσταση 330)

3-2 (απόσταση 180)

3-4 (απόσταση 230)

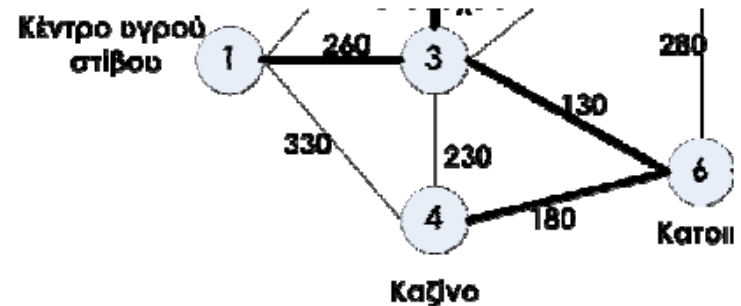
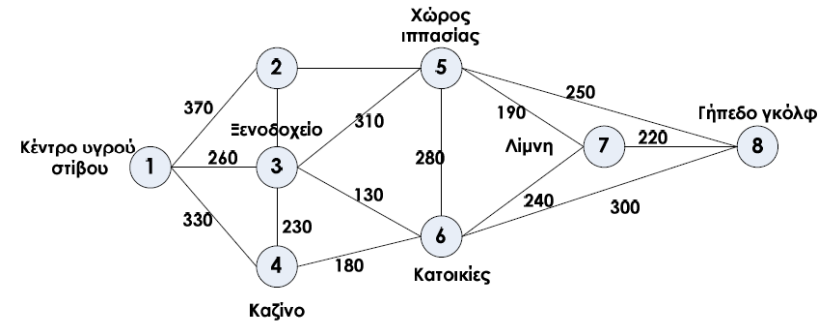
3-5 (απόσταση 310)

6-4 (απόσταση 180)

6-5 (απόσταση 280)

6-7 (απόσταση 240)

6-8 (απόσταση 300)



Οι κόμβοι 2 και 4 απέχουν την ίδια απόσταση (180)

Επιλέγω αυθαίρετα τον κόμβο 4

ΑΡΑ επιλέγουμε τον κόμβο 4 να συνδεθεί στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων

Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Οι κόμβοι 1, 3, 6 και 4 συνδέονται με

1-2 (απόσταση 370)

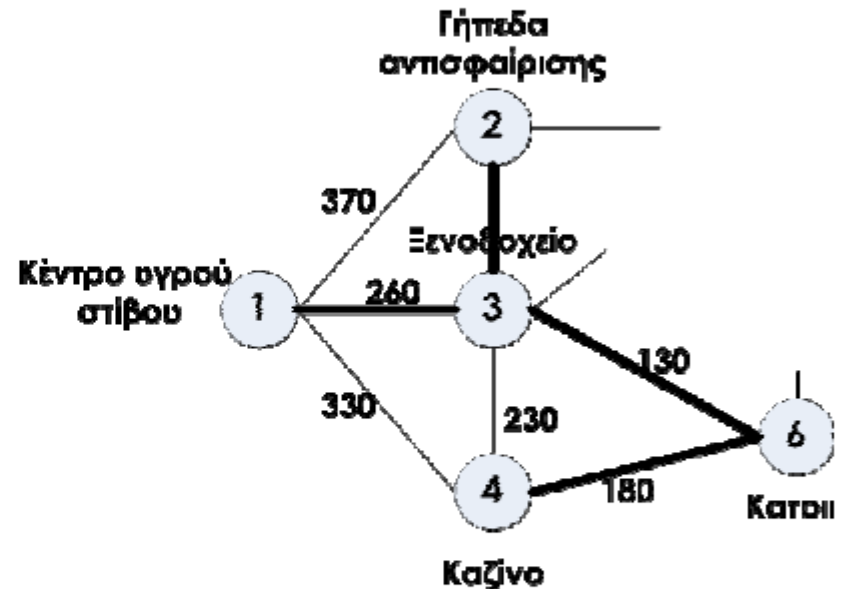
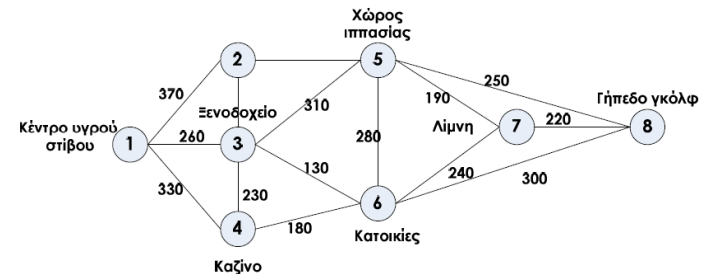
3-2 (απόσταση 180)

3-5 (απόσταση 310)

6-5 (απόσταση 280)

6-7 (απόσταση 240)

6-8 (απόσταση 300)



Εξετάζουμε ΜΟΝΟ με το σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων ποιοι μη συνδεδεμένοι υπάρχουν

ΑΡΑ επιλέγουμε τον κόμβο 2 να συνδεθεί στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων

Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Οι κόμβοι 1, 3, 6, 4 και 2 συνδέονται με

2-5 (απόσταση 400)

3-5 (απόσταση 310)

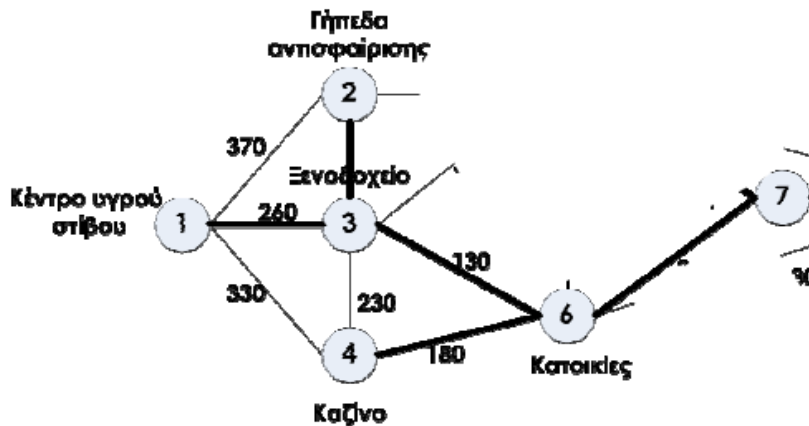
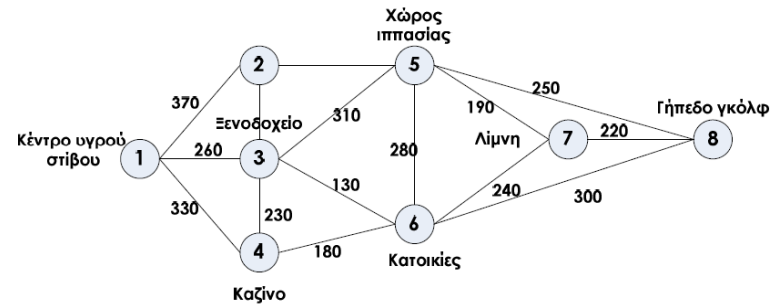
6-5 (απόσταση 280)

6-7 (απόσταση 240)

6-8 (απόσταση 300)

Εξετάζουμε ΜΟΝΟ με το σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων ποιοι μη συνδεδεμένοι υπάρχουν

ΑΡΑ επιλέγουμε τον κόμβο 7 να συνδεθεί στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων



Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Οι κόμβοι 1, 3, 6, 4, 2 και 7 συνδέονται με

2-5 (απόσταση 400)

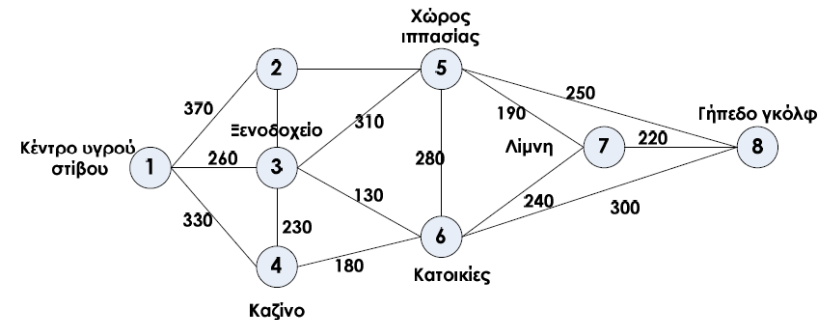
3-5 (απόσταση 310)

6-5 (απόσταση 280)

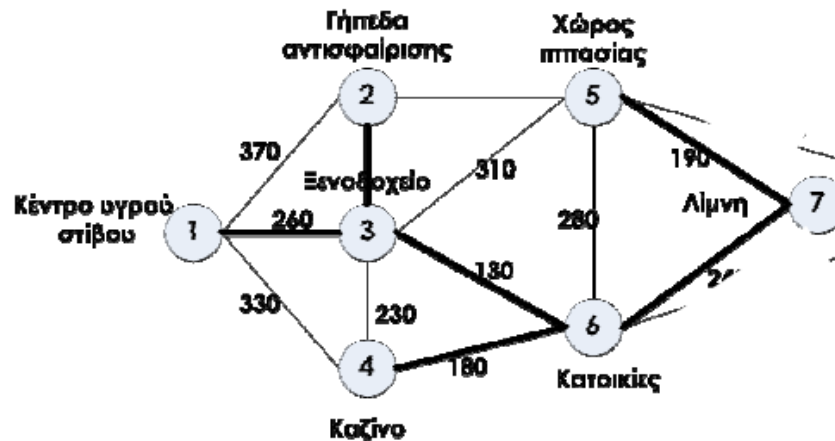
6-8 (απόσταση 300)

7-5 (απόσταση 190)

7-8 (απόσταση 220)



ΑΡΑ επιλέγουμε τον κόμβο 5 να συνδεθεί στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων



Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου

ΠΑΡ'ΑΔΕΙΓΜΑ 1:

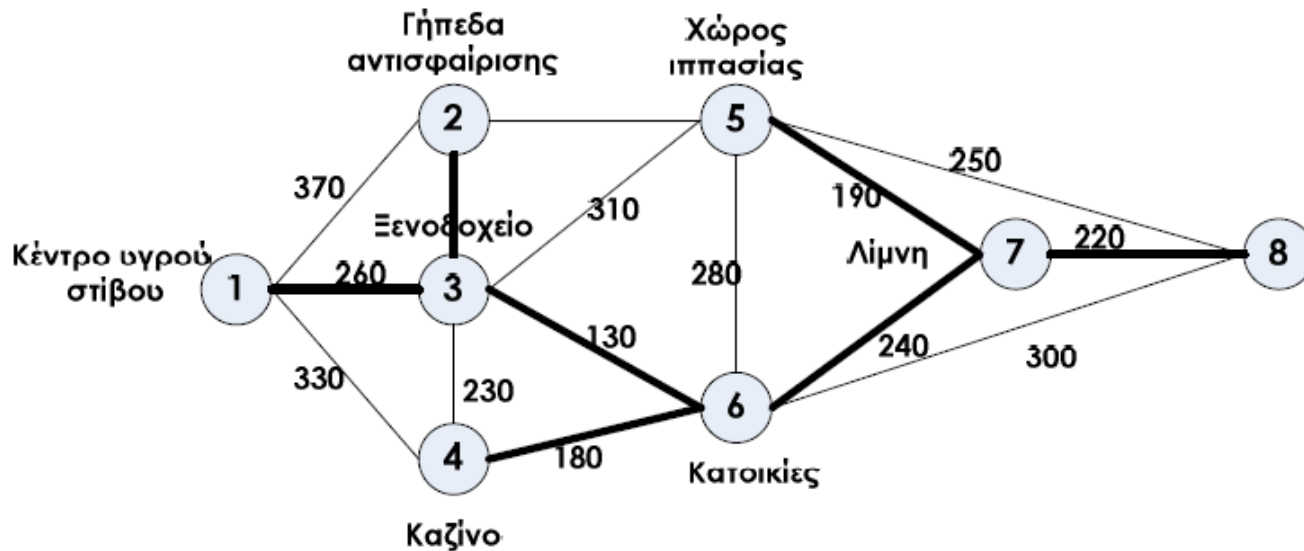
Οι κόμβοι 1, 3, 6, 4, 2, 7 και 5 συνδέονται με

5-8 (απόσταση 250)

6-8 (απόσταση 300)

7-8 (απόσταση 220)

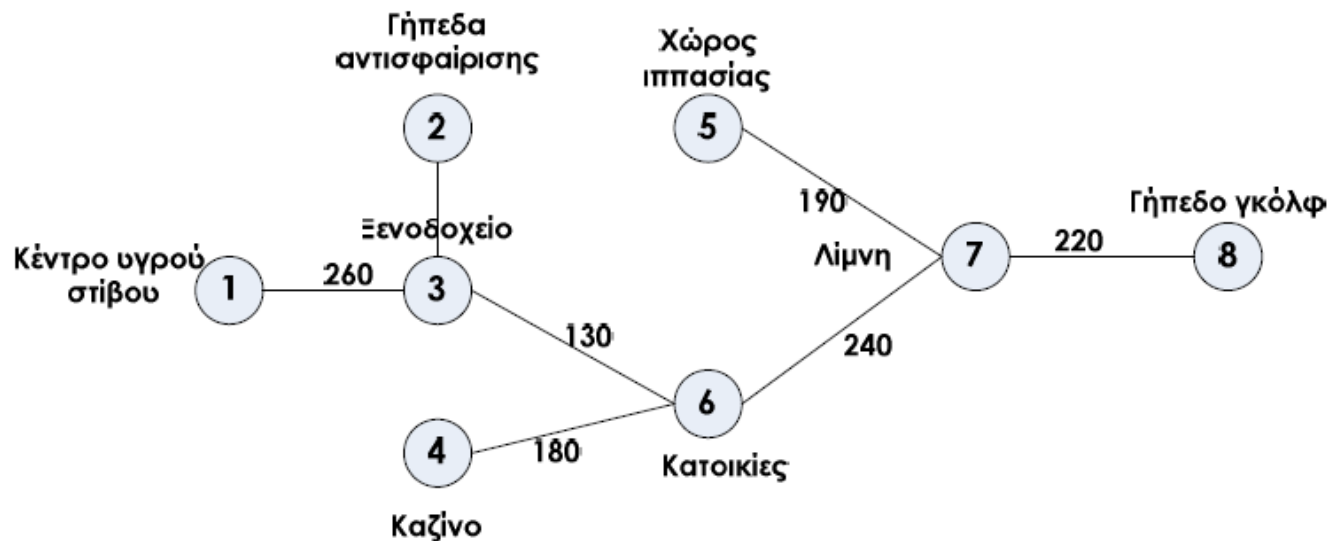
ΑΡΑ επιλέγουμε τον κόμβο 8 να συνδεθεί στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων



Το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Άρα το ζευγνύον μονοπάτι είναι το ακόλουθο



Και το συνολικό μήκος των ακμών του είναι
 $260+130+180+180+240+190+220=1400$



Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

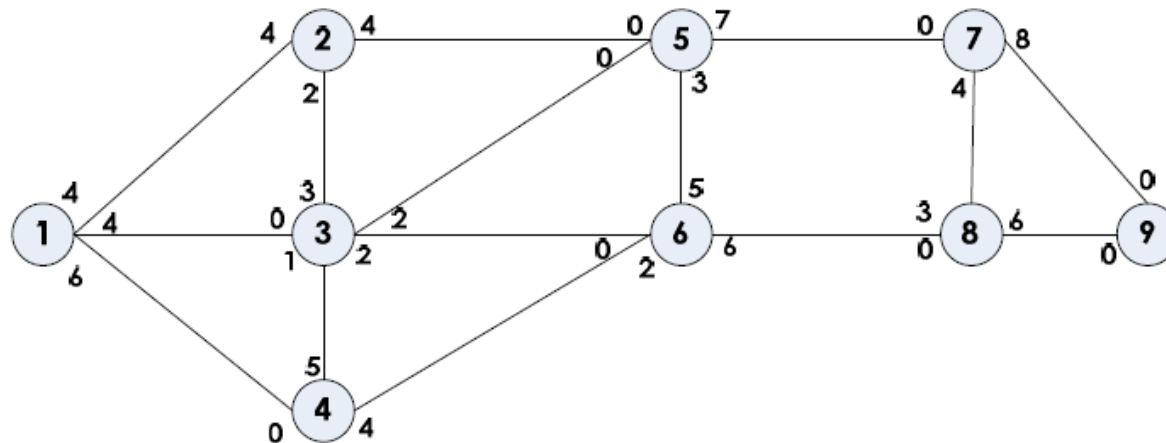
- ◉ Σε πολλές περιπτώσεις δικτύων, οι ακμές περιορίζονται ως προς το πλήθος των υλικών που μπορούν να περάσουν από αυτές στη μονάδα του χρόνου.
- ◉ Στόχος είναι η μεγιστοποίηση της ροής από έναν κόμβο (την πηγή) σ' έναν άλλο κόμβο (δέκτη) όταν οι ενδιάμεσες ακμές περιορίζουν τη συνολική ροή του συστήματος, χαρακτηριζόμενες από τη δυναμικότητα της ροής τους.
- ◉ Τα προβλήματα αυτά ονομάζονται *προβλήματα μέγιστης ροής*

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Μια γεωργική επιχείρηση έχει εγκαταστήσει ένα σύστημα άρδευσης στα κτήματα της, το οποίο μέσω ενός δικτύου γεωτρήσεων, σωληνώσεων και πιεστικών συστημάτων το νερό που αντλείται από μια βασική πηγή (κόμβος 1) διοχετεύεται προς τα βασικά σημεία-κόμβους. Έτσι ποτίζονται οι ενδιαμέσες καλλιέργειες και μέσω των πιεστικών το νερό που απομένει, προωθείται προς ένα σημείο εξόδου (δέκτης κόμβος 9).

Στο σχήμα φαίνεται ο καθαρός όγκος νερού που μπορεί να διοχετευθεί από κόμβο σε κόμβο.



Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ MAXIMAL FLOW

Βήμα 1: Επιλέγουμε **αυθαίρετα** ένα μονοπάτι από την πηγή προς το δέκτη με θετική (μη μηδενική) δυναμικότητα ροής

Βήμα 2: Αναπροσαρμόζουμε τις δυναμικότητες ροής των ακμών του μονοπατιού, **αφαιρώντας** τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση του **δέκτη**.

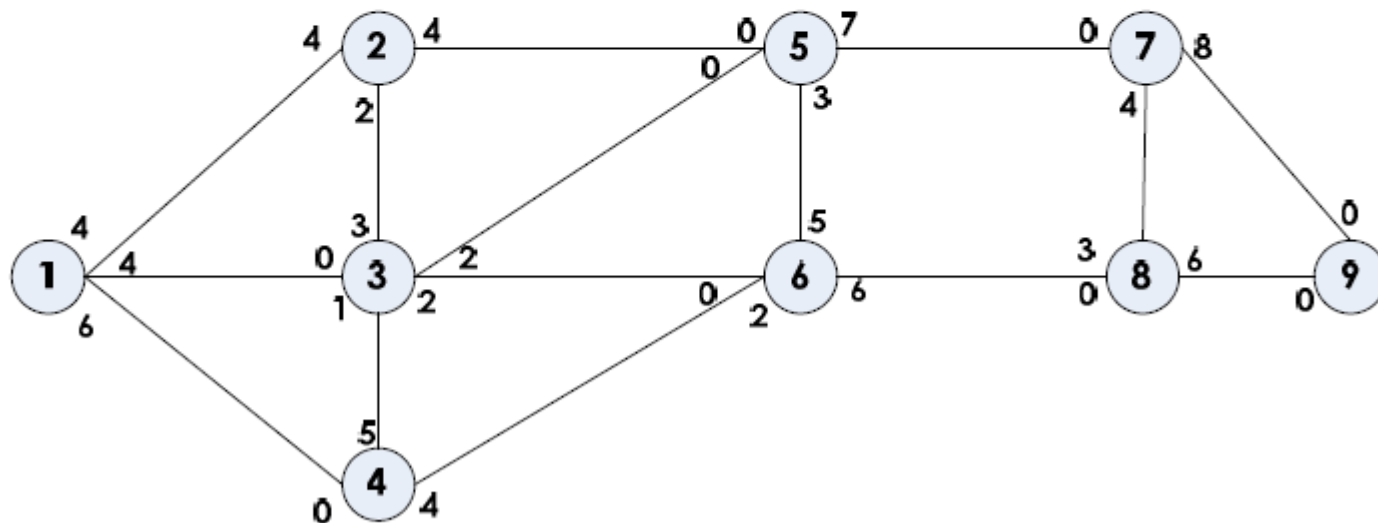
Βήμα 3: Αναπροσαρμόζουμε τις δυναμικότητες ροής των ακμών του μονοπατιού, **προσθέτοντας** τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση της **πηγής**.

Βήμα 4: Ελέγχουμε αν υπάρχει μονοπάτι με θετική δυναμικότητα ροής προς το δέκτη. Αν ναι επαναλαμβάνουμε από το Βήμα 1, διαφορετικά έχουμε εντοπίσει την άριστη λύση

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

ΠΑΡ'ΑΔΕΙΓΜΑ 1:

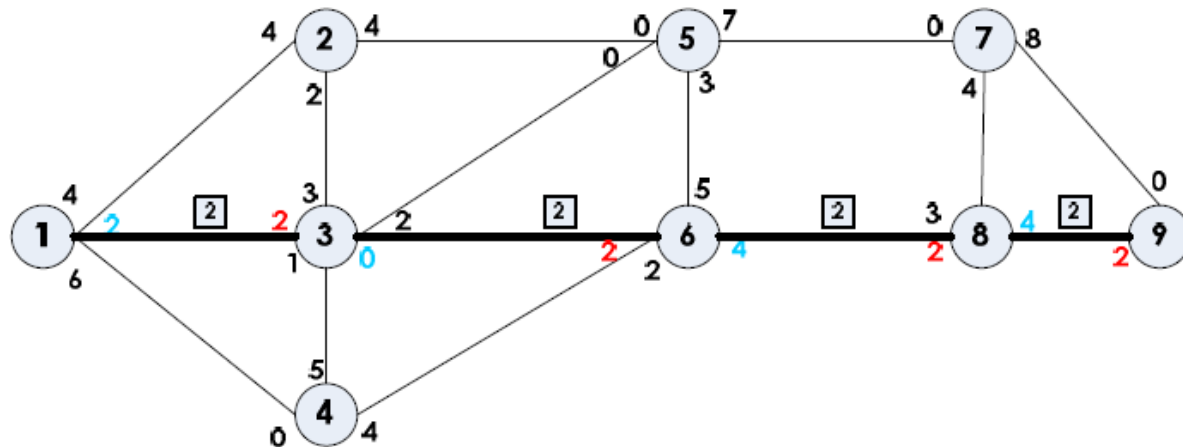
- Επιλέγουμε αυθαίρετα τον κόμβο 1
- Επιλέγουμε το μονοπάτι 1-3-6-8-9



Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

- Η μέγιστη ροή στο μονοπάτι αυτό είναι 2
- Αφαιρούμε τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση του δέκτη

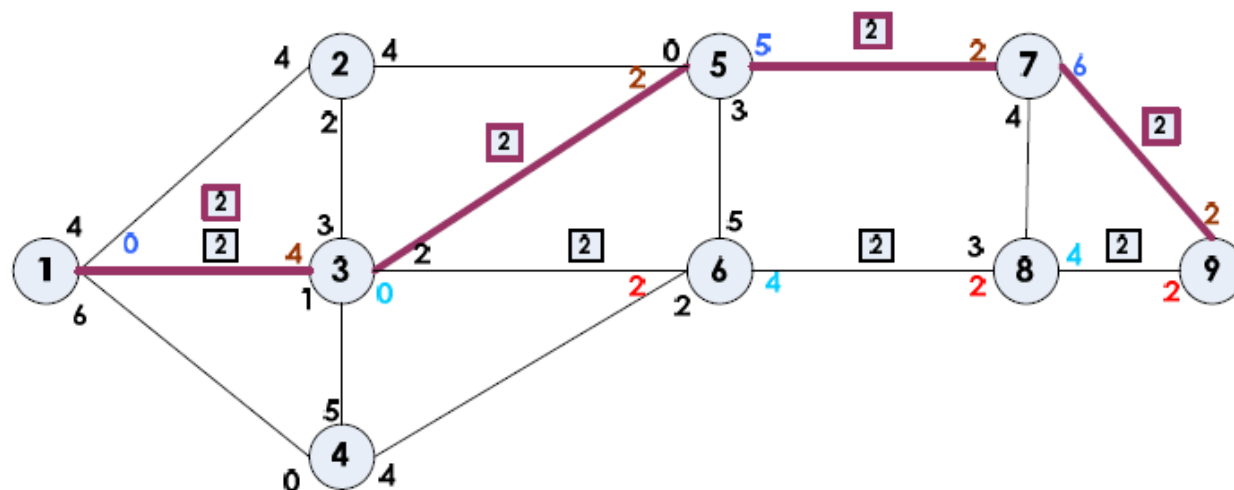


- Προσθέτουμε τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση της πηγής.

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

ΠΑΡ'ΑΔΕΙΓΜΑ 1:

- Επιλέγουμε το μονοπάτι **1-3-5-7-9**
- Η μέγιστη ροή στο μονοπάτι αυτό είναι 2
- **Αφαιρούμε** τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση του **δέκτη**

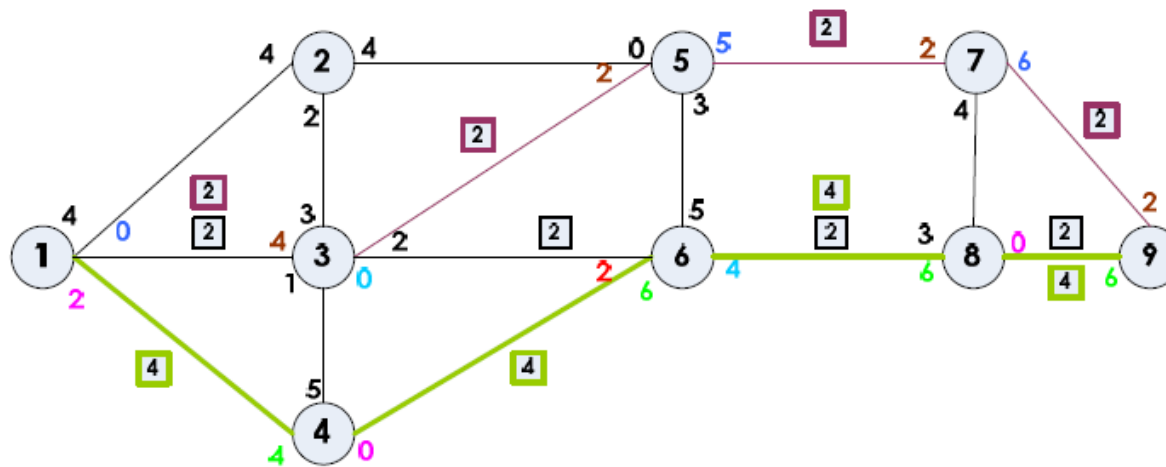


- **Προσθέτουμε** τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση της **πηγής**.

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

- Επιλέγουμε το μονοπάτι 1-4-6-8-9
- Η μέγιστη ροή στο μονοπάτι αυτό είναι 4
- Αφαιρούμε τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση του δέκτη

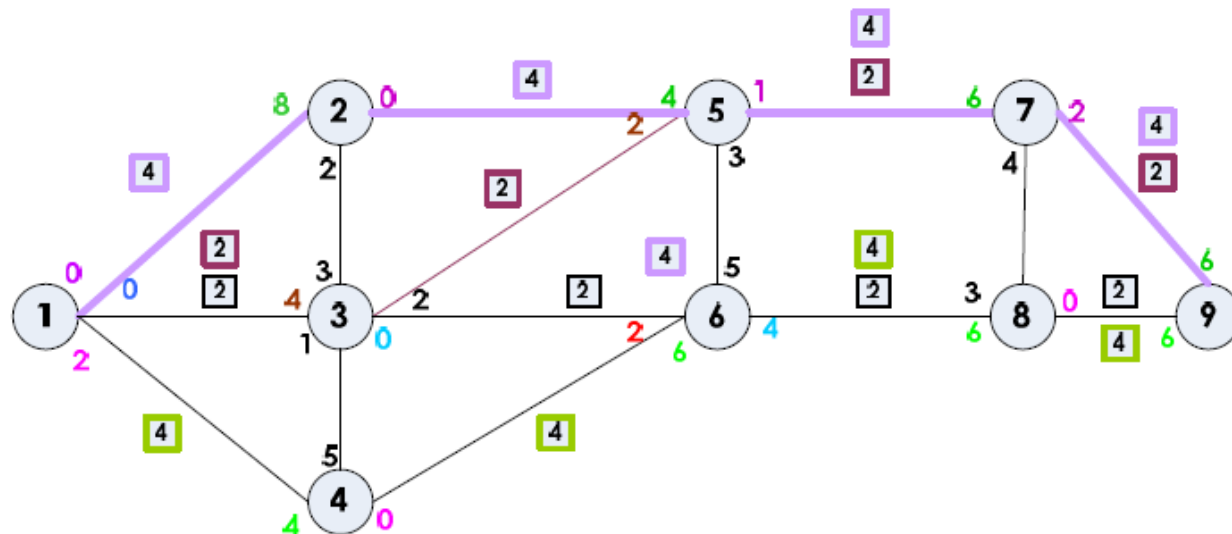


- Προσθέτουμε τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση της πηγής.

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

ΠΑΡ'ΑΔΕΙΓΜΑ 1:

- Επιλέγουμε το μονοπάτι 1-2-5-7-9
- Η μέγιστη ροή στο μονοπάτι αυτό είναι 4
- Αφαιρούμε τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση του δέκτη



- Προσθέτουμε τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση της πηγής.
- ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΑΛΛΟ ΜΟΝΟΠΑΤΙ ΜΕ ΘΕΤΙΚΗ ΡΟΗ ΑΡΑ ΕΧΟΥΜΕ ΕΝΤΟΠΙΣΕΙ ΤΗΝ ΑΡΙΣΤΗ ΛΥΣΗ

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

ΠΑΡ'ΑΔΕΙΓΜΑ 1:

- Εξετάζουμε αν υπάρχει άλλο μονοπάτι με θετική ροή
- ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΑΛΛΟ ΜΟΝΟΠΑΤΙ ΜΕ ΘΕΤΙΚΗ ΡΟΗ ΑΡΑ ΕΧΟΥΜΕ ΕΝΤΟΠΙΣΕΙ ΤΗΝ ΑΡΙΣΤΗ ΛΥΣΗ

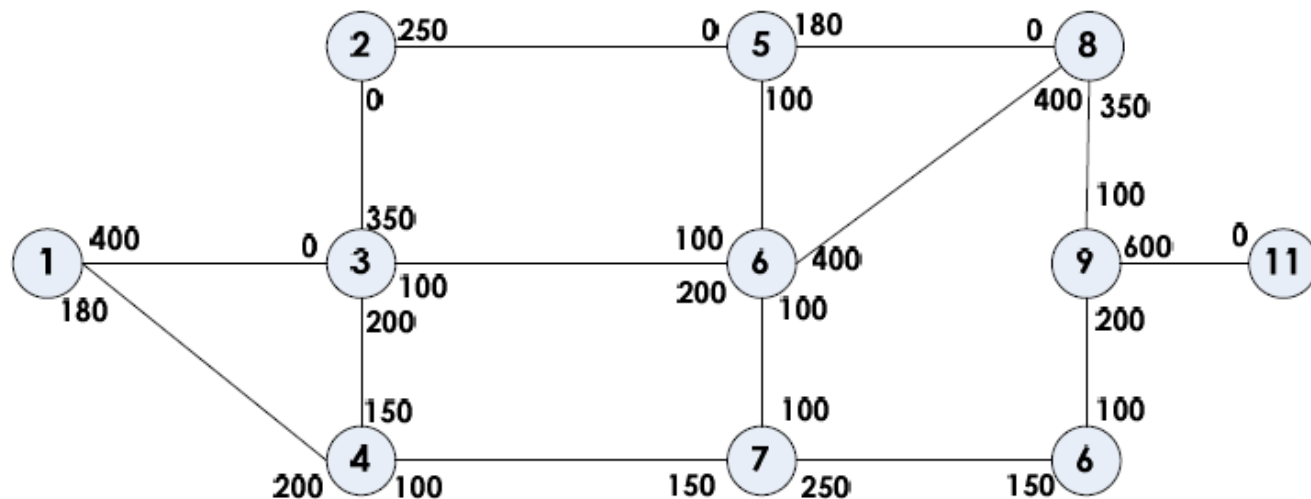
- Η άριστη λύση αποτελείται

i.	1-3-6-8-9	Ροή	2
ii.	1-3-5-7-9	Ροή	2
iii.	1-4-6-8-9	Ροή	4
iv.	1-2-5-7-9	Ροή	4
	ΣΥΝΟΛΟ		12

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

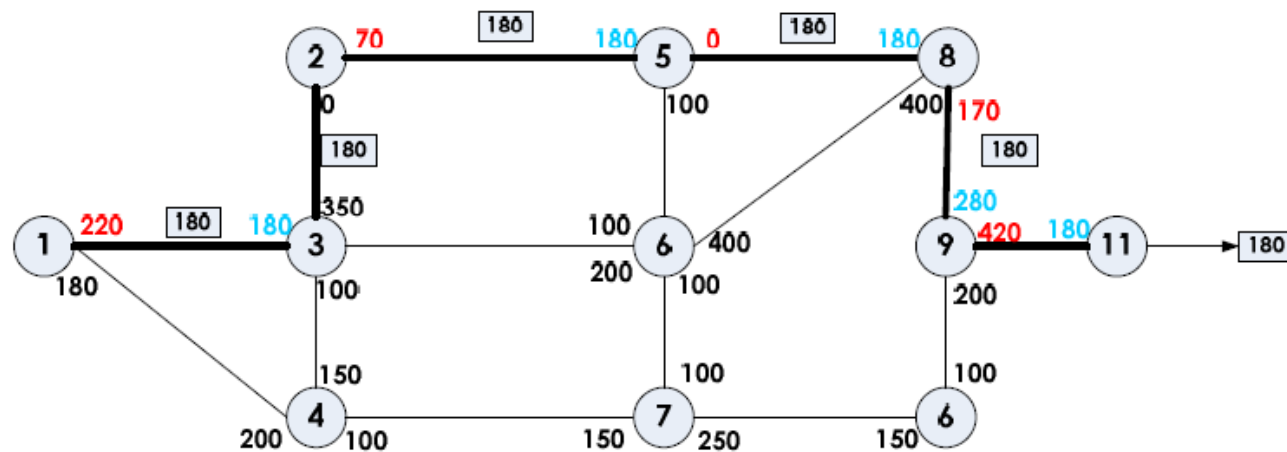
Ένα δίκτυο αγωγών πετρελαίου συνδέει την πόλη 1 με την πόλη 11 σύμφωνα με τα στοιχεία του σχήματος. Οι υπόλοιποι κόμβοι είναι ενδιάμεσοι σταθμοί μέσω των οποίων μπορεί να διοχετευθεί το πετρέλαιο, ενώ οι ακμές είναι αγωγοί. Ζητείται η μέγιστη δυνατή ροή πετρελαίου από την πόλη 1 στην πόλη 11



Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

- Επιλέγουμε το μονοπάτι 1-2-5-8-9-11
- Η μέγιστη ροή στο μονοπάτι αυτό είναι 180
- **Αφαιρούμε** τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση του **δέκτη**

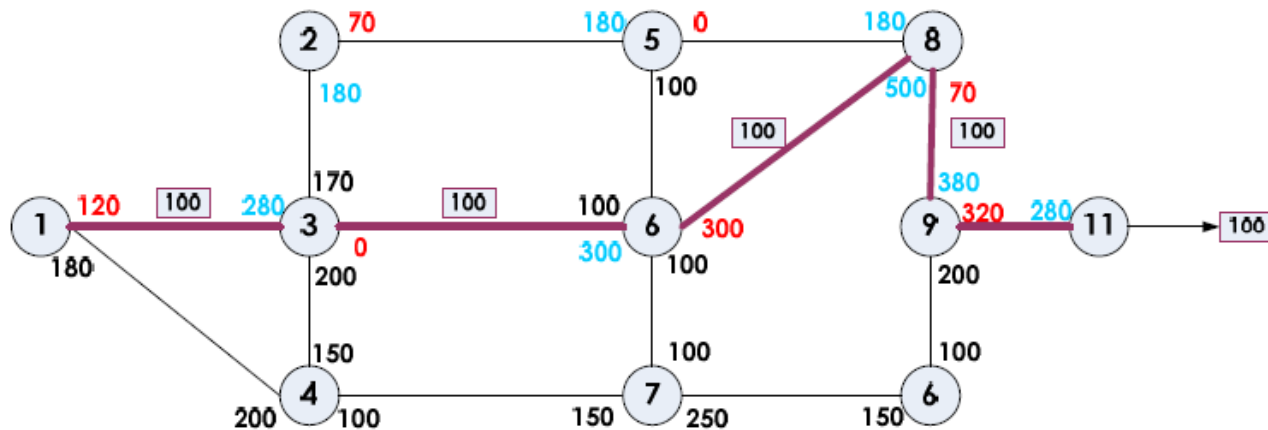


- Προσθέτουμε τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση της **πηγής**.

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

- Επιλέγουμε το μονοπάτι **1-3-6-8-9-11**
- Η μέγιστη ροή στο μονοπάτι αυτό είναι **100**
- **Αφαιρούμε** τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση του **δέκτη**

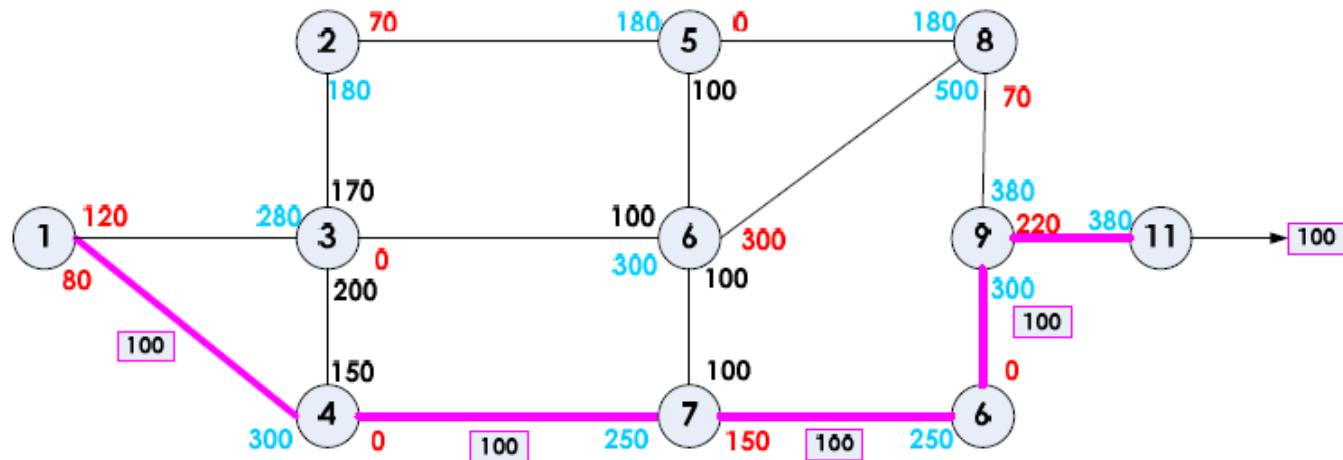


- **Προσθέτουμε** τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση της **πηγής**.

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

- Επιλέγουμε το μονοπάτι 1-4-7-6-9-11
- Η μέγιστη ροή στο μονοπάτι αυτό είναι 100
- Αφαιρούμε τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση του δέκτη

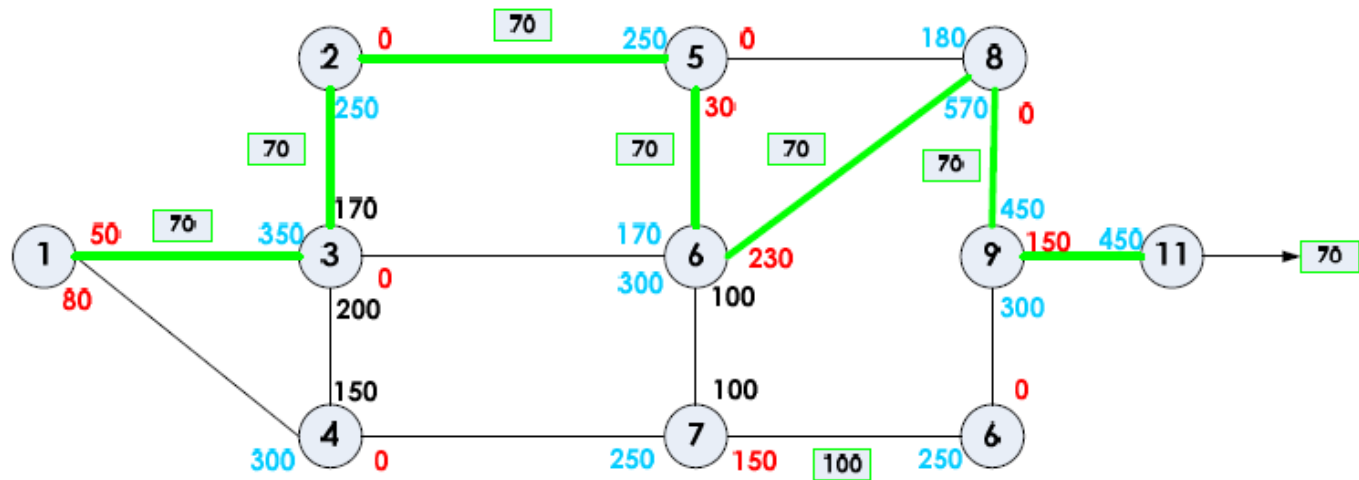


- Προσθέτουμε τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση της πηγής.

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

- Επιλέγουμε το μονοπάτι **1-2-5-6-8-11**
- Η μέγιστη ροή στο μονοπάτι αυτό είναι **70**
- **Αφαιρούμε** τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση του **δέκτη**



- Προσθέτουμε τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση της **πηγής**.

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

ΠΑΡ'ΑΔΕΙΓΜΑ:

- Εξετάζουμε αν υπάρχει άλλο μονοπάτι με θετική ροή
- ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΑΛΛΟ ΜΟΝΟΠΑΤΙ ΜΕ ΘΕΤΙΚΗ ΡΟΗ ΑΡΑ ΕΧΟΥΜΕ ΕΝΤΟΠΙΣΕΙ ΤΗΝ ΑΡΙΣΤΗ ΛΥΣΗ
- Η άριστη λύση αποτελείται

i.	1-2-5-8-9-11	Ροή	180
ii.	1-3-6-8-9-11	Ροή	100
iii.	1-4-7-6-9-11	Ροή	100
iv.	1-2-5-6-8-11	Ροή	70
	ΣΥΝΟΛΟ		450