Τ.Ε.Ι. Στερεάς Ελλάδας
Σχολή Διοίκησης και Οικονομίας
Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής

Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας

Δρ Αναστάσιος Μαγκούτας
Αναπληρωτής Καθηγητής
Εφαρμοσμένης Οικονομικής των Επιχειρήσεων
Τηλ. 2228099582, e-mail: amag@teiste.gr

Γραφείο Β215-Α,
Ώρες Γραφείου:
Τετάρτη 11:00-13:00 & 15:00-16:00
Πέμπτη 10:00-12:00

Περιεχόμενα

- Βασικά στοιχεία της θεωρίας ουρών
- Συστήματα εξυπηρέτησης
- Το Βασικό Σύστημα Εξυπηρέτησης με Μια Ουρά Αναμονής και Μια Θέση Εξυπηρέτησης
- Το Βασικό Σύστημα Εξυπηρέτησης με παράλληλες Θέσεις Εξυπηρέτησης

Οι διαφάνειες βασίζονται στο βιβλίο των Γ. Οικονόμου, Α. Γεωργίου, Ποσοτική Ανάλυση για τη Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων, Τόμος Β, Εκδ. Μπένου

Βασικά Στοιχεία της θεωρίας ουρών

- Ουρές αναμονής (waiting lines, queues) : φαινόμενο που συναντάμε στην καθημερινή μας ζωή

στις τράπεζες

στη στάση του λεωφορείου

σε ένα τηλεφωνικό κέντρο

- Οτιδήποτε αναζητεί να εξυπηρετηθεί (άνθρωπος, μηχάνημα) ονομάζεται πελάτης (customer)
- Τα σημεία εξυπηρέτησης ονομάζονται θέσεις εξυπηρέτησης (servers)
- Το πλήθος των πελατών που φτάνει για εξυπηρέτηση στη μονάδα του χρόνου ακολουθεί μια πιθανοθεωρητική κατανομή, η οποία χαρακτηρίζεται από το μέσο πλήθος των πελατών στη μονάδα του χρόνου. Το μέσο πλήθος ονομάζεται μέσος ρυθμός αφίξεων (arrival rate)
- Ο αριθμός των εξυπηρετούμενων πελατών δεν είναι σταθερός και ακολουθεί μια άλλη πιθανοθεωρητική κατανομή η οποία χαρακτηρίζεται από το μέσο αναμενόμενο πλήθος των πελατών που μπορεί να εξυπηρετηθεί στη μονάδα του χρόνου. Ο μέσος αριθμός εξυπηρετούμενων πελατών ονομάζεται μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης (service rate)

Πότε δημιουργούνται οι ουρές

- Όταν η δυναμικότητα ενός συστήματος εξυπηρέτησης (service capacity) ΔΕΝ επαρκεί για να ικανοποιήσει την ζήτηση
  - Ως δυναμικότητα ενός συστήματος ορίζουμε:
    - Το πλήθος των θέσεων εξυπηρέτησης
    - Το ρυθμό εξυπηρέτησης κάθε ουρά
- Δημιουργούνται όμως και σε περιπτώσεις όπου η δυναμικότητα είναι επαρκής:
  - Υπάρχει αβεβαιότητα ως προς την έκβαση των γεγονότων
    - Θυμηθείτε ότι αβεβαιότητα ως προς ένα γεγονός σημαίνει ότι δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων το αποτέλεσμα
  - Συστήματα που ενσωματώνουν τέτοια ενδεχόμενα ονομάζονται στοχαστικά (stochastic)
  - Συστήματα που ενσωματώνουν γεγονότα τα αποτελέσματα των οποίων είναι γνωστά ονομάζονται προσδιοριστικά (deterministic)
- Οι ουρές αναμονής είναι στοχαστικά συστήματα

  Η αβεβαιότητα διέπει τη συμπεριφορά των θέσεων εργασίας. Η μείωση του χρόνου αναμονής μπορεί να επιτευχθεί με σχεδιασμό της δυναμικότητας της εξυπηρέτησης

Σκοπός της Θεωρίας Ουρών

- Η αβεβαιότητα που υπάρχει σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης δημιουργεί ουρές αναμονής, ακόμη και στην περίπτωση όπου η δυναμικότητα του συστήματος εμφανίζεται να είναι επαρκής για να ικανοποιήσει τη ζήτηση.

- Η ΘΕΩΡΙΑ ΟΥΡΩΝ αποσκοπεί στη μείωση του χρόνου αναμονής, που είναι ένα από τα βασικά στοιχεία λειτουργικότητας του συστήματος.

- Η μείωση του χρόνου αναμονής μπορεί να επιτευχθεί είτε με κατάλληλο σχεδιασμό της δυναμικότητας εξυπηρέτησης του συστήματος, είτε με βελτίωση του μέσου ρυθμού εξυπηρέτησης, ή με αύξηση του πλήθους των θέσεων εξυπηρέτησης.

- Το ζητούμενο είναι να βρεθεί ένα σημείο ισορροπίας ανάμεσα στο κόστος βελτίωσης του επιπέδου εξυπηρέτησης και στο κόστους που προκύπτει από την αναμονή των πελατών.

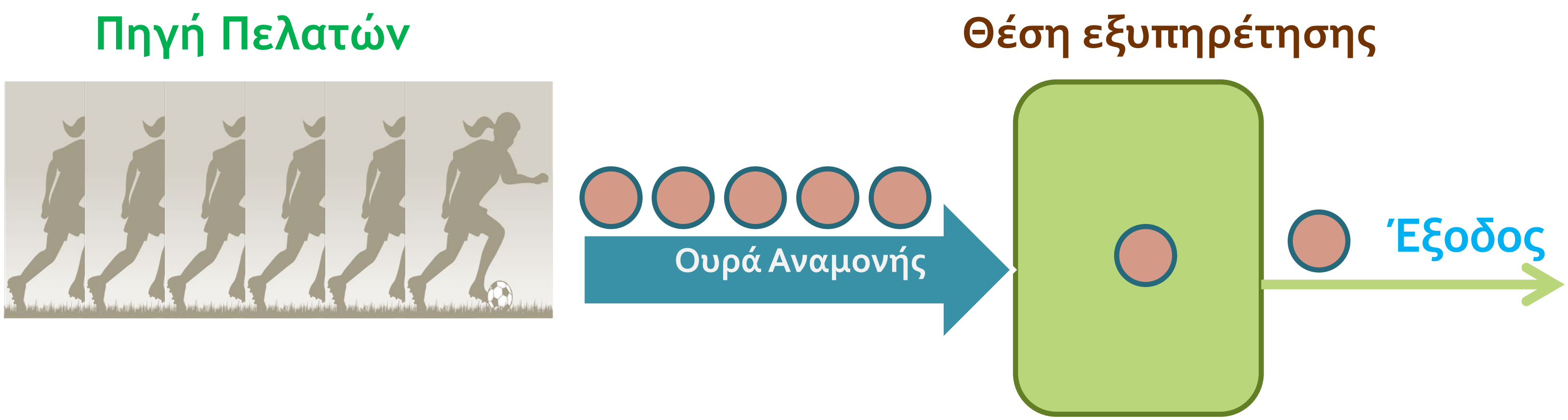
Χαρακτηριστικά συστημάτων εξυπηρέτησης

- Στόχος η πρόβλεψη :
  - της αναμενόμενης συμπεριφοράς τους συστήματος
  - των δεικτών απόδοσής του οι οποίοι είναι:
    - Ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά
    - Ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα (ουρά + θέση εξυπηρέτησης)
    - Το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά
    - Το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα
    - Το ποσοστό απασχόλησης της θέσης ή των θέσεων εξυπηρέτησης

- Οι δείκτες αυτοί δείχνουν την απόδοση του συστήματος και σχετίζονται με το κόστος λειτουργίας καθώς και με την ικανοποίηση απαραίτητων λειτουργικών προδιαγραφών του συστήματος
    - Την ύπαρξη ελάχιστης χωρητικότητας στον χώρο αναμονής
    - Επίτευξη επιθυμητού χρόνου αναμονής των πελατών, κ.α.

Σύστημα εξυπηρέτησης

Γραφικά ένα σύστημα εξυπηρέτησης φαίνεται παρακάτω:



Θα εξετάσουμε αναλυτικά κάθε «κομμάτι» (component)
του συστήματος εξυπηρέτησης

Σύστημα εξυπηρέτησης

Πηγή Πελατών-Διαδικασία Αφίξεων

1. Πλήθος πελατών:
   Άπειρο ή πεπερασμένο

2. Μας ενδιαφέρει κατά πόσο το πλήθος των πελατών στην πηγή **επηρεάζει το ρυθμό αφίξεων** στο σύστημα

3. Συστήματα που παρέχουν υπηρεσίες στο **ευρύ κοινό** θεωρούμε ότι έχουν *άπειρο* πληθυσμό

1. Διαδικασία αφίξεων που σχετίζεται με τον ρυθμό που καταφθάνουν οι πελάτες στην ουρά αναμονής

2. Όταν οι αφίξεις πραγματοποιούνται με τυχαίο τρόπο σημαίνει ότι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους

3. Σε πολλά συστήματα το πλήθος των αφίξεων στη μονάδα του χρόνου ακολουθεί την κατανομή **Poisson**

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!}, X = 0,1,2,\ldots$$

Κατανομές σε σ.ε.

- Διαδικασία Αφίξεων~ Poisson
- Ο χρόνος T μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων ~ Εκθετική κατανομή

$$P\left(T \le t\right) = 1 - e^{-kt}$$

  - Η παράμετρος που χαρακτηρίζει την εκθετική κατανομή είναι η μέση τιμή της.
  - Εδώ η μέση τιμή είναι $\frac{1}{k} = \frac{1}{\lambda}$ όπου λ είναι η μέση τιμή της Poisson

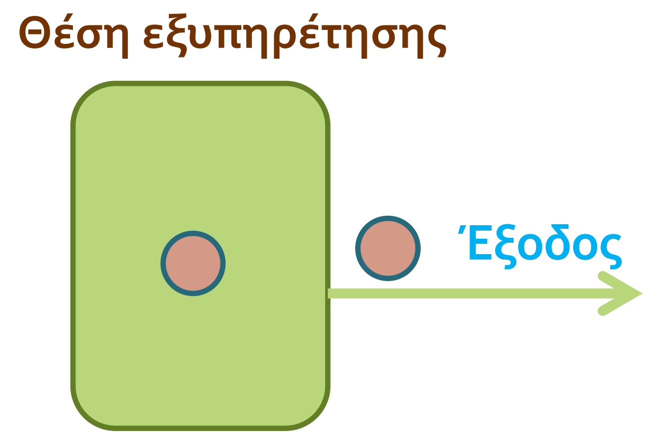
- Όταν αναφερόμαστε σε ρυθμό αφίξεων, εννοούμε μέσο πλήθος πελατών κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος και το πλήθος αυτό ακολουθεί την κατανομή Poisson. Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στις διαδοχικές αφίξεις δεν είναι ρυθμός αφίξεων, αλλά προκύπτει από αυτόν και ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Σύστημα εξυπηρέτησης

1. Η ουρά χαρακτηρίζεται από τη χωρητικότητά της
2. Ο χώρος αναμονής μπορεί να έχει *άπειρες* θέσεις, μπορεί όμως να έχει και *πεπερασμένες* θέσεις
3. Στη δεύτερη περίπτωση οι πελάτες που καταφθάνουν και βρίσκουν όλες τις θέσεις κατειλημμένες δεν εισέρχονται στο σύστημα
4. Ο ρυθμός αφίξεων των πελατών επηρεάζεται από την περιορισμένη χωρητικότητα αφού όταν οι θέσεις είναι κατειλημμένες ο πραγματικός ρυθμός μηδενίζεται
5. Αν το μήκος της ουράς είναι μεγάλο οι πελάτες δεν προσχωρούν (balking)
6. Μπαίνουν στην ουρά και αποχωρούν πριν εξυπηρετηθούν (reneging)
7. Μπαίνουν στην ουρά και κάποια στιγμή αλλάζουν ουρά (jockeying)
8. Πειθαρχία ουράς: η σειρά με την οποία επιλέγεται ο επόμενος πελάτης για να εξυπηρετηθεί:
   - FIFO (*First In First Out*)
   - LIFO (*Last In First Out*)

Σύστημα εξυπηρέτησης

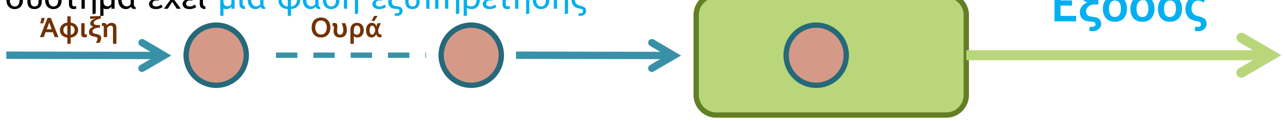
1. Χαρακτηριστικά της Διαδικασίας εξυπηρέτησης είναι:
   - Το πλήθος των θέσεων εξυπηρέτησης (= αριθμός θέσεων που λειτουργούν παράλληλα)
   - Το πλήθος των διαδοχικών φάσεων εξυπηρέτησης
   - Η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης



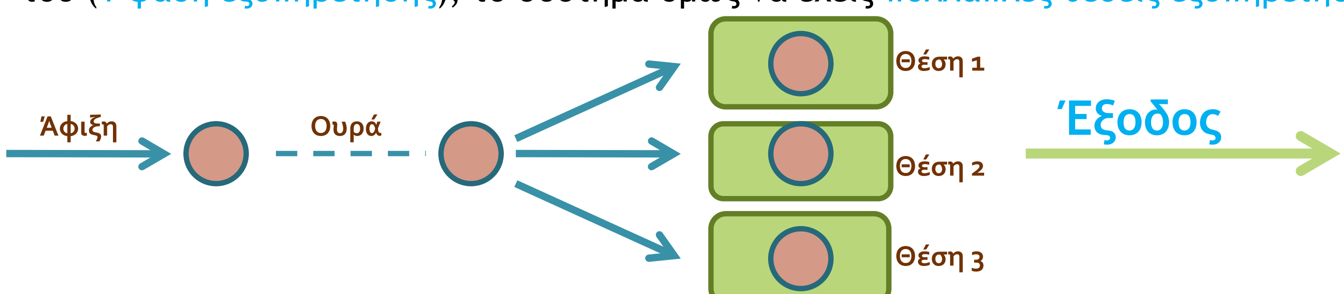
2. Αν μια ομάδα ανθρώπων εξυπηρετεί τους πελάτες μαζί σαν να πρόκειται για μία θέση εξυπηρέτησης τότε έχουμε ένα σύστημα με μια θέση

3. Αν τα άτομα εργάζονται παράλληλα και λειτουργούν ανεξάρτητα τότε πρόκειται για σύστημα με πολλαπλές θέσεις εξυπηρέτησης

4. Όταν ο πελάτης εξυπηρετείται από μια μόνο θέση, όπου ολοκληρώνεται και η εξυπηρέτησή του, το σύστημα έχει μια φάση εξυπηρέτησης

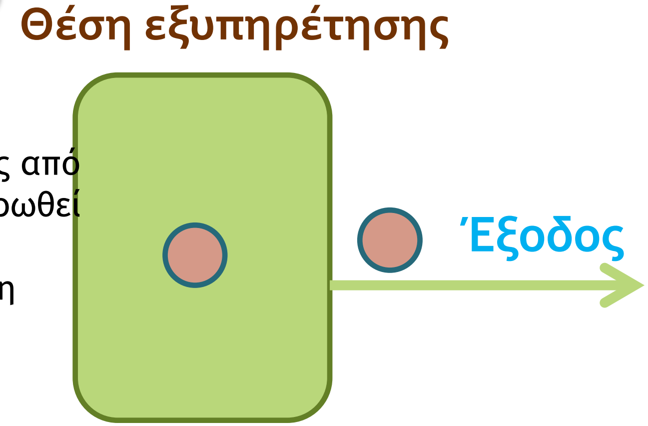


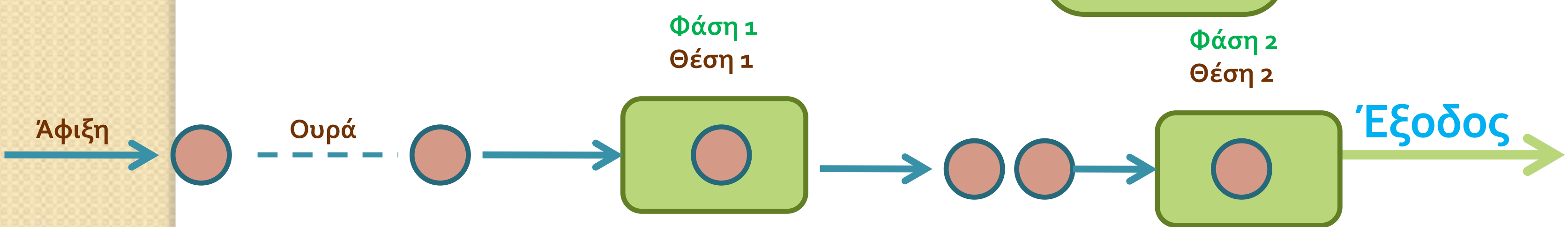
5. Μπορεί ο πελάτης να εξυπηρετείται από μόνο μια θέση και να ολοκληρώνεται η εξυπηρέτησή του (1 φάση εξυπηρέτησης), το σύστημα όμως να έχεις πολλαπλές θέσεις εξυπηρέτησης

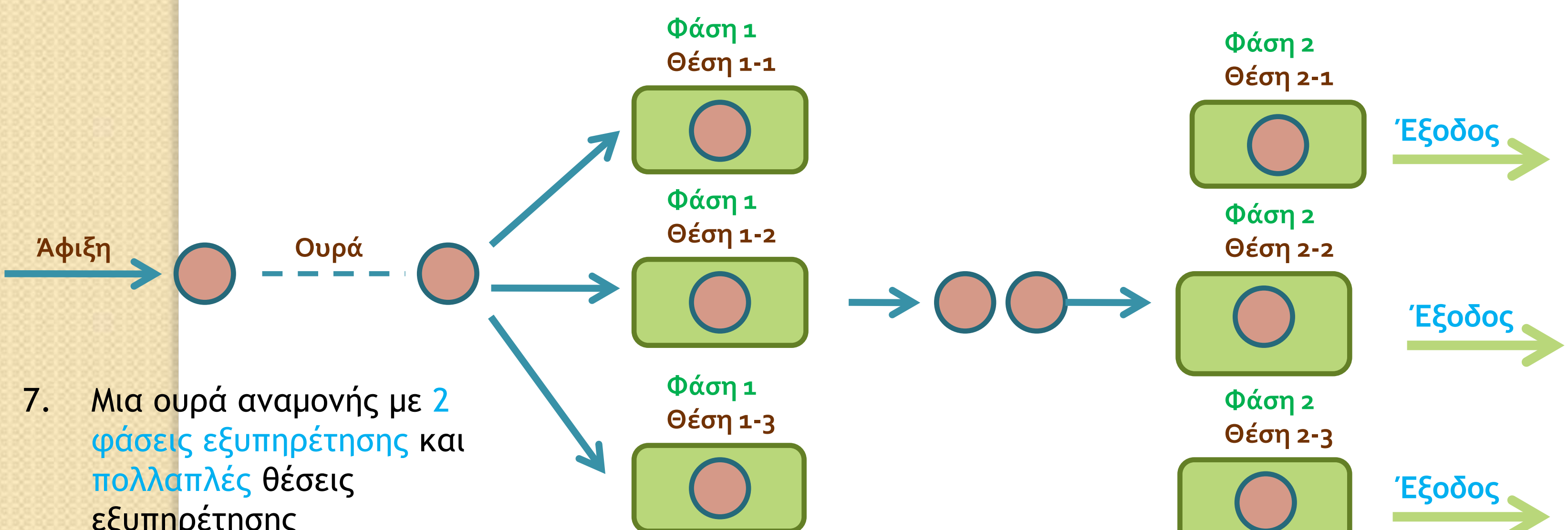


Σύστημα εξυπηρέτησης

6. Αν ο πελάτης πρέπει να περάσει από περισσότερες από μια διαδοχικές φάσεις εξυπηρέτησης πριν ολοκληρωθεί η εξυπηρέτησή του, τότε αν αυτές οι φάσεις είναι διαδοχικές η έξοδος των πελατών από τη μια φάση τροφοδοτεί την διαδικασία αφίξεων της επόμενης







7. Μια ουρά αναμονής με 2 φάσεις εξυπηρέτησης και πολλαπλές θέσεις εξυπηρέτησης

Κατανομές σε σ.ε. (2)

- Ρυθμός εξυπηρέτησης αφορά το πλήθος των πελατών που μπορεί να εξυπηρετήσει η θέση στη μονάδα του χρόνου. Το μέσο πλήθος πελατών που εξυπηρετεί η θέση στη μονάδα του χρόνου ακολουθεί~ **Poisson** και το ονομάζουμε μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης και το συμβολίζουμε με μ.

$$P\left(X\right)=\frac{e^{-\lambda}\mu^{X}}{X!}, X=0,1,2,...$$

- Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί~ Εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\frac{1}{\theta}=\frac{1}{\mu}$

$$P\left(T\leq t\right)=1-e^{-\theta t}$$

Συμβολισμός Μοντέλων

Γενική μορφή: A/B/s/k/N

A: είναι η θέση για το συμβολισμό της κατανομής εισόδου πελατών. Πιθανό σύμβολο είναι το M, που παριστάνει τη διαδικασία Poisson. Το M αναφέρεται στην εκθετική κατανομή, που συνοδεύει τη Poisson. Δηλαδή, όταν χρησιμοποιούμαι το M εννοούμε κατανομή Poisson για το ρυθμό αφίξεων και αντίστοιχα εκθετική κατανομή για την κατανομή του χρόνου ανάμεσα στις διαδοχικές αφίξεις.

B: είναι η θέση για το συμβολισμό της κατανομής του χρόνου εξυπηρέτησης. Όμοια με A

s: είναι η θέση για το πλήθος των παράλληλων θέσεων εξυπηρέτησης

k: είναι η θέση για τη χωρητικότητα του συστήματος εξυπηρέτησης, όταν αυτή είναι περιορισμένη. Το k είναι το πλήθος των θέσεων αναμονής μαζί με τις θέσεις εξυπηρέτησης.

N: παριστάνει το πλήθος των πελατών στην πηγή, όταν αυτό είναι πεπερασμένο.

Μοντέλο με μία θέση εξυπηρέτησης, με διαδικασία Poisson στις αφίξεις και εκθετική κατανομή για το χρόνο εξυπηρέτησης: M/M/1

Όταν s>1, M/M/s

- Το Βασικό Σύστημα Εξυπηρέτησης με Μια Ουρά Αναμονής και Μια Θέση Εξυπηρέτησης
  - Κατάσταση Ισορροπίας
  - Παραδοχές Μοντέλου
  - Βασικές σχέσεις για δείκτες απόδοσης
- Το Βασικό Σύστημα Εξυπηρέτησης με παράλληλες Θέσεις Εξυπηρέτησης

Το Βασικό Σύστημα Εξυπηρέτησης με Μια Ουρά Αναμονής και Μια Θέση Εξυπηρέτησης

Κατάσταση ισορροπίας

- Τα θεωρητικά μοντέλα περιγράφουν την συμπεριφορά ενός συστήματος όταν αυτό βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας (steady state)
- Ένα σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας όταν η συμπεριφορά του δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες που υπάρχουν κατά την έναρξη της λειτουργίας του. (π.χ. ουρά αναμονής στην τράπεζα πριν την ώρα έναρξής της)
- Ένα σύστημα φτάνει σε κατάσταση ισορροπίας, όταν παρέλθει ένα εύλογο χρονικό διάστημα από την αρχική του κατάσταση, στην διάρκεια του οποίου εξαλείφεται η επίδραση των συνθηκών εκκίνησης
- Η περίοδος που απαιτείται, ώστε το σύστημα να μην εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες και να συγκλίνει σε κατάσταση ισορροπίας, ονομάζεται παροδική περίοδος (transient period, warm up period)
  - Αν δεν μπορούμε να απομονώσουμε μια περίοδο κατά την οποία να έχει εξαλειφθεί η επίδραση της αρχικής κατάστασης τότε το σύστημα δεν φτάνει ποτέ σε ισορροπία και χρησιμοποιούμε **την τεχνική της προσομοίωσης**

Παραδοχές συστήματος

- Η πηγή των πελατών έχει ΑΠΕΙΡΟΥΣ ΠΕΛΑΤΕΣ
- Η διαδικασία αφίξεων ακολουθεί την ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON με γνωστό μέσο ρυθμό αφίξεων στη μονάδα του χρόνου
- Οι πελάτες εξυπηρετούνται κατά FIFO
- Οι πελάτες μπαίνουν στην ουρά και ΔΕΝ αποχωρούν χωρίς να εξυπηρετηθούν
- Το πλήθος των πελατών στην ουρά δεν περιορίζεται από την ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ του συστήματος
- Υπάρχει 1 ΘΕΣΗ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ
- Η εξυπηρέτηση γίνεται σε ΜΙΑ ΦΑΣΗ
- Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ με γνωστή μέση τιμή
- Ο ρυθμός εξυπηρέτησης ακολουθεί ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON
- Ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ από το μέσο ρυθμό αφίξεων

Δείκτες απόδοσης

ΒΑΣΙΚΟΙ ΔΕΙΚΤΕΣ

- Μέσος ρυθμός αφίξεων στη μονάδα του χρόνου: λ
- Μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης στη μονάδα του χρόνου: μ

- ΓΙΑ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΣΧΥΕΙ

$$\lambda < \mu$$

Δείκτες απόδοσης

- Μέσος πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται στη μονάδα του χρόνου: L_s

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Η πιθανότητα να είναι η θέση εξυπηρέτησης απασχολημένη, ονομάζεται βαθμός απασχόλησης της θέσης (utilization factor) και συμβολίζεται με ρ

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Αυτό συμβαίνει μόνο σ' αυτό το σύστημα, ακόμη η πιθανότητα αυτή συμπίπτει με:

- το μέσο ποσοστό του χρόνου που η θέση είναι απασχολημένη
- Την πιθανότητα να περιμένει ένας πελάτης που φτάνει στο σύστημα όταν βρίσκει τη μοναδική θέση απασχολημένη
- Αν το σύστημα έχει s παράλληλες θέσεις εξυπηρέτησης ο βαθμός απασχόλησης δίνεται από τον τύπο

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}, s > 1$$

Δείκτες απόδοσης

- Μέσος πλήθος πελατών στην ουρά αναμονής: L_q

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

- Μέσος πλήθος πελατών στο σύστημα: $L = L_s + L_q$

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

- Μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά: W_q

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Δείκτες απόδοσης

- Μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα: W

$$W = \boxed{W_q} + \boxed{\frac{1}{\mu}} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Χρόνος αναμονής στην ουρά

Χρόνος εξυπηρέτησης **Poisson**

εναλλακτικά

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{L_s + L_q}{\lambda}$$

Δείκτες απόδοσης

- Η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

  - Η πιθανότητα αυτή είναι και το μέσο ποσοστό του χρόνου που η θέση είναι αδρανής (% αδράνειας θέσης)
  - Επειδή το σύστημα έχει μια θέση εκφράζει την πιθανότητα ένας πελάτης που καταφθάνει στο σύστημα να εξυπηρετείται αμέσως
  - Η πιθανότητα ένας πελάτης να χρειαστεί να περιμένει $1-P_0$ και για το συγκεκριμένο σύστημα είναι ρ

Δείκτες απόδοσης

- Η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα (ουρά + θέση εξυπηρέτησης)

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

  - Επειδή $\lambda<\mu$ η τιμή της πιθανότητας P_n είναι αντιστρόφως ανάλογη του n.

$$n \to \infty,\ P_n \to 0$$

- Η πιθανότητα να υπάρχουν n>κ πελάτες στο σύστημα (ουρά + θέση εξυπηρέτησης)

$$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$$

Παράδειγμα

Μια ξενοδοχειακή μονάδα στη Ρόδο ενδιαφέρεται να εκτιμήσει τους δείκτες απόδοσης της. Τη στιγμή που ελέγχει το σύστημα, αυτό βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, οι διαδικασίες αφίξεων και εξυπηρέτησης πελατών ακολουθούν την Poisson και οι πελάτες εξυπηρετούνται με πειθαρχεία FIFO. Στη reception υπάρχει μόνο μια θέση εξυπηρέτησης.

Τα στοιχεία που έχει στη διάθεσή της είναι τα ακόλουθα:

- Η διαδικασία αφίξεων έχει μέσο ρυθμό λ=8 πελάτες την ώρα
- Ο υπάλληλος στη reception μπορεί να εξυπηρετήσει κατά μέσο όρο μ=12 πελάτες την ώρα
- Η εκθετική κατανομή που εκφράζει τους χρόνους ανάμεσα στις διαδοχικές αφίξεις έχει μέση τιμή 1/λ=1/8 ώρες
- Η εκθετική κατανομή που εκφράζει τον χρόνο εξυπηρέτησης κάθε πελάτη έχει μέση τιμή 1/μ=1/12 ώρες

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν:

1) Ο βαθμός απασχόλησης της θέσης εξυπηρέτησης
2) Η πιθανότητα ένας πελάτης που φτάνει να εξυπηρετηθεί αμέσως
3) Το μέσος μήκος της ουράς
4) Το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα
5) Ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά
6) Ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα
7) Η πιθανότητα να υπάρχουν 3 πελάτες στο σύστημα, δύο στην ουρά και ένας στη θέση εξυπηρέτησης

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν:

1) Ο βαθμός απασχόλησης της θέσης εξυπηρέτησης
2) Η πιθανότητα ένας πελάτης που φτάνει να εξυπηρετηθεί αμέσως
3) Το μέσος μήκος της ουράς
4) Το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα
5) Ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά
6) Ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα
7) Η πιθανότητα να υπάρχουν 3 πελάτες στο σύστημα, δύο στην ουρά και ένας στη θέση εξυπηρέτησης

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{12} = 0,667$$

$$\mathrm{P}_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{8}{12} = 1 - 0,667 = 0,333$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{8^2}{12(12-8)} = 1,333$$

$$L = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)} = \frac{8}{(12-8)} = 2$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} == \frac{1,333}{8} = 0,167$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{12-8} = 0,25$$

$$\mathrm{P}_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \mathrm{P}_0 = \left(\frac{8}{12}\right)^3 \frac{1}{3} = 0,098$$

Το Βασικό Σύστημα Εξυπηρέτησης με παράλληλες Θέσεις Εξυπηρέτησης

Παραδοχές συστήματος

- Η πηγή των πελατών έχει ΑΠΕΙΡΟΥΣ ΠΕΛΑΤΕΣ
- Η διαδικασία αφίξεων ακολουθεί την ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON με γνωστό μέσο ρυθμό αφίξεων στη μονάδα του χρόνου
- Οι πελάτες εξυπηρετούνται κατά FIFO πηγαίνοντας σε κάποια ελεύθερη θέση εξυπηρέτησης
- Οι πελάτες μπαίνουν στην ουρά και ΔΕΝ αποχωρούν χωρίς να εξυπηρετηθούν
- Η ουρά έχει απεριόριστη ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ
- Υπάρχει ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ από 1 ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ
- Η εξυπηρέτηση γίνεται σε ΜΙΑ ΦΑΣΗ σε κάποια από τις θέσεις εξυπηρέτησης
- Ο χρόνος εξυπηρέτησης σε κάθε θέση εξυπηρέτησης ακολουθεί την ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ με γνωστή μέση τιμή
- Ο ρυθμός εξυπηρέτησης ακολουθεί ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON
- Ο ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ από το μέσο ρυθμό αφίξεων

Δείκτες απόδοσης

ΒΑΣΙΚΟΙ ΔΕΙΚΤΕΣ

- Μέσος ρυθμός αφίξεων στη μονάδα του χρόνου: λ
- Μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης στη μονάδα του χρόνου: μ
- Πλήθος θέσεων εξυπηρέτησης: s
- Μέσος συνολικός ρυθμός εξυπηρέτησης $s\mu$
- Βαθμός απασχόλησης όλων των θέσεων

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

- ΓΙΑ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΣΧΥΕΙ

$$\lambda < s\mu$$

Δείκτες απόδοσης

- Ο βαθμός απασχόλησης των θέσεων εξυπηρέτησης συμβολίζεται με ρ

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

Σ΄ αυτήν την περίπτωση το ρ είναι η πιθανότητα όλες οι θέσεις να είναι απασχολημένες και συμπίπτει με το μέσο ποσοστό του χρόνου που όλες οι θέσεις είναι απασχολημένες.

- Η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)}$$

  - Η πιθανότητα αυτή είναι και το μέσο ποσοστό του χρόνου που οι θέσεις είναι αδρανής (% αδράνειας θέσης)

  - Η πιθανότητα ένας πελάτης που καταφθάνει στο σύστημα να εξυπηρετείται αμέσως είναι η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον μια θέση αδρανής, δηλαδή το άθροισμα των πιθανοτήτων

$$P_0 + P_1 + \ldots + P_{s-1} = \sum_{n=0}^{s-1} P_n$$

Δείκτες απόδοσης

- Η πιθανότητα ένας πελάτης που φτάνει στο σύστημα να χρειαστεί να περιμένει μέχρι να εξυπηρετηθεί είναι

$$P_w = 1 - \left(P_0 + P_1 + \ldots + P_{s-1}\right) = 1 - \sum_{n=0}^{s-1} P_n$$

  - εναλλακτικά

$$P_w = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\right) P_0$$

Δείκτες απόδοσης

- Μέσος πλήθος πελατών στην ουρά αναμονής:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} P_0$$

- Μέσος πλήθος πελατών στο σύστημα:

$$L = L_s + L_q = \frac{\lambda}{\mu} + L_q$$

- Μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

- Μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα:

$$W = \frac{L}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Παράδειγμα συνέχεια

Το ξενοδοχείο διαπιστώνοντας ότι οι δείκτες απόδοσης ήταν ικανοποιητικοί αποφάσισε να μην κάνει καμία παρέμβαση. Δυστυχώς όμως δεν υπολόγισε την αύξηση των τουριστών λόγω της προβολής του νησιού τα τελευταία χρόνια μετά τους Ολυμπιακούς αγώνες.

Συγκεκριμένα:

Ο μέσος ρυθμός αφίξεων αυξήθηκε κατά 25% ενώ η διαδικασία Poisson διατηρήθηκε

Επειδή το μέσο μήκος της ουράς ήταν 4.16 άτομα και ο μέσος χρόνος αναμονής ίσος με 0,41 ώρες (δηλαδή 25 λεπτά) αποφασίστηκε αναδιοργάνωση ΑΜΕΣΑ. Ο στόχος ήταν ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά να είναι 6 λεπτά το πολύ.

Εξετάστηκαν 2 εναλλακτικές:

A. Να προσλάβουν ακόμη έναν υπάλληλο στη reception ο οποίος θα κάνει αποκλειστικά την ενημέρωση για τις παροχές του ξενοδοχείου. Με πρόχειρες εκτιμήσεις ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης μπορεί να βελτιωθεί κατά 50% δηλαδή να γίνει 18 πελάτες την ώρα

B. Να προσλάβουν ακόμη έναν υπάλληλο στη reception ο οποίος θα κάνει check in στους πελάτες. Έτσι το σύστημα θα λειτουργεί με 2 θέσεις εξυπηρέτησης και ΜΙΑ ουρά αναμονής. Εδώ οι πελάτες θα δημιουργούν 2 ουρές αναμονής. Οι πελάτες θα επιλέγουν τυχαία σε ποια ουρά αναμονής θα πηγαίνουν, δηλαδή θα μοιράζονται τις 2 θέσεις με πιθανότητα 50%. Άρα ο κάθε υπάλληλος θα εξυπηρετεί 9 πελάτες την ώρα με διαδικασία Poisson.

Εξετάστε βασικούς δείκτες απόδοσης και για τις δύο εναλλακτικές.

Παράδειγμα συνέχεια

Πρόκειται για ένα σύστημα M/M/1 στο οποίο στην υπάρχουσα θέση εξυπηρέτησης προστίθεται ένας βοηθός και αυξάνεται ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης σε 18 από 12

Ο μέσος ρυθμός άφιξης είναι 10, άρα το ποσοστό απασχόλησης της θέσης εξυπηρέτησης είναι

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{18} = 0,5556$$

Η πιθανότητα ένας πελάτης να εξυπηρετείται αμέσως είναι (>**0.33** που ήταν αρχικά)

Το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά $P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{10}{18} = 1 - 0,5556 = 0,444$

Το μέσο πλήθος στο σύστημα $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{10^2}{18(18-10)} = 0,694$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,694 + \frac{10}{8} = 1,25$$

Ο μέσος χρόνος παραμονής στην ουρά

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} == \frac{0,694}{10} = 0,0694x60 = 4,17m$$

Ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,694 + \frac{1}{18} = 0,125x60 = 7,5m$$

Παράδειγμα συνέχεια

Πρόκειται για ένα σύστημα Μ/Μ/2 και για κάθε υπάλληλο ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι 9. Κάθε μια από τις 2 θέσεις εξυπηρέτησης εξυπηρετεί το μισό ρυθμό εξυπηρέτησης

Ο μέσος ρυθμός άφιξης είναι 10, άρα το ποσοστό απασχόλησης της θέσης εξυπηρέτησης είναι

Ο βαθμός απασχόλησης των 2 θέσεων είναι

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{10}{2*9} = 0,5556$$

Η πιθανότητα να μην υπάρχει πελάτης στο σύστημα

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)} = \frac{1}{\frac{\left(\frac{10}{9}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^2}{2!}\left(\frac{2*9}{2*9-10}\right)} = 0,2857$$

Το μέσο πλήθος στο σύστημα

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} P_0 = \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^2 9*10}{(2-1)!(2*9-10)^2} *0,2857 = 0,496$$

Ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} == \frac{0,496}{10} = 0,0496x60 = 2,98m$$

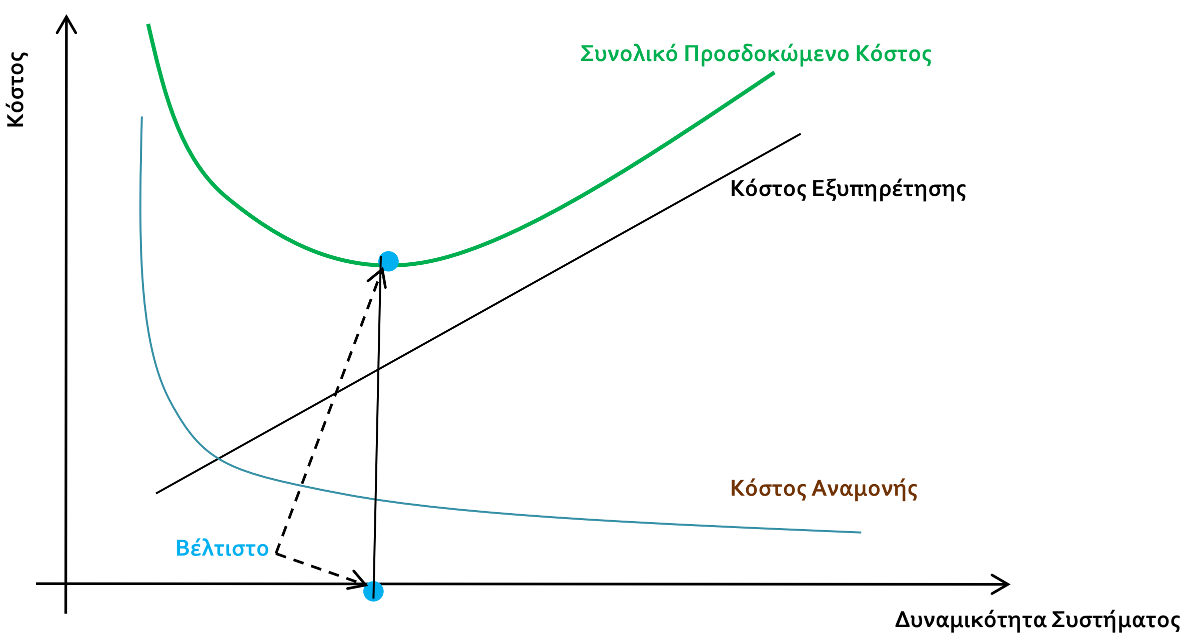
$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 9,64m$$

Δυναμικότητα συστήματος

- Το βασικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε σ' ένα σύστημα εξυπηρέτησης είναι ο *εντοπισμός της βέλτιστης δυναμικότητας.*

- Στόχος είναι ο προσδιορισμός του πλήθους των θέσεων εξυπηρέτησης για το οποίο **ελαχιστοποιείται** το συνολικό προσδοκώμενο μεταβλητό κόστος λειτουργίας του συστήματος

- Το κόστος αυτό αποτελείται από το κόστος αναμονής των πελατών και το κόστος εξυπηρέτησης.



Σχέση κόστους λειτουργίας

TC =Total Cost

TC=Waiting Cost (WC)+Service Cost (SC)

c_w Κόστος αναμονής πελάτη στη μονάδα του χρόνου

W μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στο σύστημα

$c_w * W$ είναι το προσδοκώμενο κόστος αναμονής ενός πελάτη στο σύστημα

Για το σύνολο των πελατών που φθάνουν στο σύστημα το συνολικό προσδοκώμενο κόστος αναμονής των πελατών είναι

$$WC = c_w * W * \lambda = c_w * L$$

όπου λ ο ρυθμός αφίξεων πελατών στο σύστημα

Κόστος αναμονής c_w

- Το κόστος αναμονής είναι ίδιο για εσωτερικούς και εξωτερικούς πελάτες?

- Το κόστος αναμονής πέρα από την αναμονή σχετίζεται και με την αδράνεια λόγω υποαπασχόλησης

Κόστος εξυπηρέτησης

- Ο βασικός παράγοντας που καθορίζει το κόστος εξυπηρέτησης είναι ο αριθμός των θέσεων εξυπηρέτησης s

c_s Κόστος εξυπηρέτησης στη μονάδα του χρόνου

$c_s * s$ κόστος εξυπηρέτησης για προσφερόμενη δυναμικότητα s

Άρα το συνολικό προσδοκώμενο κόστος εξυπηρέτησης είναι

$$SC = c_s * s$$

Συνολικό κόστος

$$TC = WC + SC = c_w * L + c_s * s$$

- Αν χρησιμοποιήσουμε ένα μοντέλο που να στηρίζεται μόνο στο χρόνο αναμονής του πελάτη στην ουρά και όχι το συνολικό χρόνο παραμονής στο σύστημα, τότε το συνολικό κόστος γίνεται

$$TC = WC + SC = c_w * L_q + c_s * s$$