ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΔΙΔΑΣΚΩΝ : ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ

Παρακάτω δίνονται οι λύσεις των θεμάτων που δόθηκαν στις εξετάσεις Ιανουαρίου 2014 αλλά και Σεπτεμβρίου 2014. Οι λύσεις δίνονται με αρκετά αναλυτικό τρόπο και περιέχουν αρκετές επεξηγήσεις, οι οποίες επεξηγήσεις όμως δεν ήταν απαραίτητο να γραφούν στις απαντήσεις που έδιναν οι εξεταζόμενοι κατά την ώρα της εξέτασης. Δηλαδή τα θέματα μπορούσαν να λυθούν και να γραφτούν με πολύ πιο συνοπτικό τρόπο από αυτόν που περιγράφεται παρακάτω.

Τα θέματα όπως λύνονται παρακάτω έχουν μικροδιαφορές με τις εκφωνήσεις των θεμάτων που δόθηκαν στις εξετάσεις. Τα θέματα των εξετάσεων σε κάθε εξεταστική περίοδο δόθηκαν σε 4 παραλλαγές κάθε φορά, με στόχο την αποφυγή αντιγραφής από τον διπλανό εξεταζόμενο. **ΟΜΩΣ** όλα τα θέματα έχουν στενή σχέση με λυμένες ασκήσεις που υπάρχουν στα εξής βιβλία και σημειώσεις:

[1] Ι. Θεοδώρου, Μαθηματικά Ι, Διδακτικές Σημειώσεις Τ.Ε.Ι. Στερεάς Ελλάδας, Λαμία 2012

[2] Δ. Δημητρακούδης, Ι. Θεοδώρου, Π. Κικίλιας, Ν. Κουρής, Δ. Παλαμούρδας, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός, Εκδόσεις ‘ΔΗΡΟΣ’, Αθήνα 2001

Στην συνέχεια δίνονται οι λύσεις με την αρίθμηση και την μορφή που αντιστοιχεί στην ομάδα Α των θεμάτων όπως δόθηκαν στην εξεταστική περίοδο Ιανουαρίου 2014. Τα ίδια θέματα με μικροδιαφορές σε συντελεστές δόθηκαν σαν ομάδα Α και στην εξεταστική περίοδο Σεπτεμβρίου 2014. Όπως επισημάνθηκε ήδη παραπάνω, τα θέματα όλων των άλλων ομάδων που δόθηκαν στις εξετάσεις Ιανουαρίου και Σεπτεμβρίου 2014 είναι παρόμοια και παρουσιάζουν μόνο μικρές διαφορές με τα θέματα που οι λύσεις τους δίνονται στην συνέχεια.

ΘΕΜΑ Α–1 (10 μονάδες): Να χρησιμοποιήσετε τις σχέσεις ορισμού και να υπολογίσετε τις παραγώγους των υπερβολικών συναρτήσεων: $\sinh x$, $\cosh x$ και $\tanh x$.

Παρατήρηση: Η άσκηση είναι ακριβώς ίδια με τις ασκήσεις 1, 2 και 3 στις σελίδες 162 και 163 του βιβλίου Α. Σε άλλη παραλλαγή του θέματος ζητήθηκε να υπολογιστεί η παράγωγος της υπερβολικής συνεφαπτομένης $\coth x$ που δίνεται στην άσκηση 4 στην σελίδα 163 του βιβλίου [2].

ΛΥΣΗ:

Η σχέσεις ορισμού των υπερβολικών συναρτήσεων είναι:

α. υπερβολικό ημίτονο $$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \tag{1}$$

β. υπερβολικό συνημίτονο $$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \tag{2}$$

γ. υπερβολική εφαπτομένη $$\tanh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - e^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \tag{3}$$

δ. υπερβολική συνεφαπτομένη $$\coth(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \tag{4}$$

Οπότε η παράγωγος του ημιτόνου γίνεται:

$$(\sinh x)' = \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}(-x)'}{2} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh x$$

Ενώ για την παράγωγο του συνημιτόνου βρίσκουμε ότι:

$$(\cosh x)' = \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}(-x)'}{2} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sinh x$$

Η παράγωγος της υπερβολικής συνεφαπτομένης $\tanh x$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
(\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' \\
&= \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\right)' \\
&= \frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})'(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})'}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}(-x)')(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}(-x)')}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \quad [\text{Διαφορά τετραγώνων}: \ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)] \\
&= \frac{[(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})][(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})]}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{[\mathrm{e}^x + \cancel{\mathrm{e}^{-x}} + \mathrm{e}^x - \cancel{\mathrm{e}^{-x}}][\cancel{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x}) - \cancel{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x}]}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{(2\mathrm{e}^x)(2\mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{4\cancel{\mathrm{e}^x}\cancel{\mathrm{e}^{-x}}}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{1}{(\cosh x)^2} \\
&= \frac{1}{\cosh^2 x}
\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζεται και η παράγωγος της υπερβολικής συνεφαπτομένης $\coth x$.

$$
\begin{aligned}
(\coth x)' &= \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' \\
&= \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\right)' \\
&= \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})'(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})'}{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}(-x)')(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}(-x)')}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \qquad [\text{Διαφορά τετραγώνων}: \ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)] \\
&= \frac{[(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})][(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})]}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{[\mathrm{e}^x + \cancel{\mathrm{e}^{-x}} + \mathrm{e}^x - \cancel{\mathrm{e}^{-x}}][\cancel{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x}) - \cancel{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x}]}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{(2\mathrm{e}^x)(2\mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{4\cancel{\mathrm{e}^x}\cancel{\mathrm{e}^{-x}}}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{1}{\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{(\sinh x)^2} \\
&= -\frac{1}{\sinh^2 x}
\end{aligned}
$$

ΘΕΜΑ Α–2 (10 μονάδες): Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης

$$y = \frac{x^{-3}\mathrm{e}^{4x}}{\sinh 2x}$$

Παρατήρηση: Το ζητούμενο είναι μια μικρή παραλλαγή της άσκησης 18 στην σελίδα 186 του βιβλίου [2]. Όπως επισημαίνεται και στο βιβλίο [2], πολλές φορές όταν θέλουμε να υπολογίσουμε παραγώγους από πηλίκα ή γινόμενα χρησιμοποιούμε λογαριθμική παραγώγιση γιατί με αυτό τον τρόπο συντομεύονται οι πράξεις. Δηλαδή πρώτα λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη της συνάρτησης που θέλουμε να παραγωγίσουμε και στην συνέχεια παραγωγίζουμε. Φυσικά πάντα μπορούμε να κάνουμε κανονικά τις παραγωγίσεις με χρήση των κανόνων παραγώγισης, όμως τότε συνήθως οι πράξεις είναι πιο περίπλοκες.

ΛΥΣΗ:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\mathrm{e}^{4x}}{x^3 \sinh 2x} \\
\ln y &= \ln(\mathrm{e}^{4x}) - \ln(x^3) - \ln(\sinh 2x) \\
\frac{1}{y} y' &= \frac{1}{\mathrm{e}^{4x}}(\mathrm{e}^{4x})' - \frac{1}{x^3}(x^3)' - \frac{1}{\sinh 2x}(\sinh 2x)' \\
\frac{1}{y} y' &= \frac{1}{\mathrm{e}^{4x}}(4\mathrm{e}^{4x}) - \frac{1}{x^3}(3x^2) - \frac{1}{\sinh 2x}(2\cosh 2x) \\
\frac{1}{y} y' &= 4 - \frac{3}{x} - 2\coth 2x \\
y' &= \frac{\mathrm{e}^{4x}}{x^3 \sinh 2x}\left(4 - \frac{3}{x} - 2\coth 2x\right)
\end{aligned}
$$

ΘΕΜΑ Α–3 (10 μονάδες): Δίνεται η συνάρτηση $y = x^{-1}\mathrm{e}^{-x^2/2}$. Να δείξετε ότι ικανοποιεί την εξίσωση

$$xy' = -(1 + x^2)y$$

.

Παρατήρηση : Το ζητούμενο είναι μια μικρή παραλλαγή της άσκησης 9 στην σελίδα 178 του βιβλίου Α.

ΛΥΣΗ:

$$
\begin{aligned}
y &= x^{-1}\mathrm{e}^{-x^2/2} \\
y' &= (x^{-1}\mathrm{e}^{-x^2/2})' \\
&= (x^{-1})'\mathrm{e}^{-x^2/2} + x^{-1}(\mathrm{e}^{-x^2/2})' \\
&= -x^{-2}\mathrm{e}^{-x^2/2} + x^{-1}\mathrm{e}^{-x^2/2}\left(\frac{-x^2}{2}\right)' \\
&= -x^{-1}\underbrace{x^{-1}\mathrm{e}^{-x^2/2}} + \underbrace{x^{-1}\mathrm{e}^{-x^2/2}}\left(\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}}\right)
\end{aligned}
$$

Οπότε τελικά βρίσκουμε ότι

$$y' = -x^{-1}y - yx$$

Και άρα τελικά πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη με το x προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
xy' &= -xx^{-1}y - xxy \\
xy' &= -\cancel{xx^{-1}}y - x^2y \\
xy' &= -y - x^2y \\
xy' &= -(1 + x^2)y
\end{aligned}
$$

ΘΕΜΑ Α–4 (15 μονάδες): Να χρησιμοποιήσετε τον αναδρομικό τύπο του Leibniz και να υπολογίσετε την παράγωγο δέκατης τάξης για την συνάρτηση

$$f(x) = x^2 \cos x$$

Παρατήρηση: Το ζητούμενο είναι μια παραλλαγή της άσκησης 3 στην σελίδα 161 του βιβλίου [2]. Χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί επίσης και η σχέση 7 στην σελίδα 159 του βιβλίου που δίνει την νιοστή παράγωγο του $\cos x$. Επίσης η ζητούμενη άσκηση μοιάζει λίγο και με την άσκηση 7 στην σελίδα 87 στις σημειώσεις του μαθήματος [1], δεδομένου εμφανίζονται και στις δύο περιπτώσεις οι παράγωγοι του x^2.

ΛΥΣΗ:

Ο αναδρομικός τύπος του Leibniz δίνεται απο την σχέση:

$$(f \cdot g)^{(n)} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Οι συντελεστές $\binom{n}{k}$ δίνονται απο την σχέση

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-(k-i)}{i} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i},$$

Δηλαδή ο αναδρομικός τύπος γράφεται

$$(f \cdot g)^{(n)} \;=\; f^{(n)} \cdot g + n f^{(n-1)} \cdot g' + \frac{n(n-1)}{2!} f^{(n-2)} \cdot g'' + \cdots + f \cdot g^{(n)}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Leibniz έχουμε:

$$\begin{aligned} f^{(10)}(x) &= \frac{1}{2}(x^2 \cdot \cos x)^{(10)} \\ &= \frac{1}{2}\left[(\cos x)^{(10)} \cdot x^2 + 10(\cos x)^{(9)} \cdot (x^2)' + \frac{10 \cdot 9}{2!}(\cos x)^{(8)} \cdot (x^2)'' + \dots\right] \end{aligned}$$

Όμως όλοι οι υπόλοιποι όροι του αναπτύγματος είναι ίσοι με το μηδέν, γιατί από την τρίτη παράγωγο και πάνω όλες οι παράγωγοι του x^2 είναι ίσες με μηδέν, δηλαδή

$$(x^2)''' = (x^2)^{(4)} = (x^2)^{(4)} = \cdots = (x^2)^{(10)} = 0$$

Επομένως απομένουν μόνο οι τρεις πρώτοι όροι και άρα:

$$\begin{aligned} f^{(10)}(x) &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(x + \frac{10\pi}{2}\right) \cdot x^2 + 10\cos\left(x + \frac{9\pi}{2}\right) \cdot 2x + \frac{10 \cdot 9}{2}\cos\left(x + \frac{8\pi}{2}\right) \cdot 2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[x^2 \cos\left(x + \frac{10\pi}{2}\right) + 20x\cos\left(x + \frac{9\pi}{2}\right) + 90\cos\left(x + \frac{8\pi}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Όμως από ιδιότητες ημιτόνου και συνημιτόνου έχουμε ότι

$$\cos\left(x + \frac{10\pi}{2}\right) = -\cos x, \;\; \cos\left(x + \frac{9\pi}{2}\right) = \sin x, \;\; \cos\left(x + \frac{8\pi}{2}\right) = \cos x$$

Επομένως τελικά το ανάπτυγμα γίνεται

$$f^{(10)}(x) = \frac{1}{2}\left[-x^2 \cos x + 20x \sin x + 90 \cos x\right]$$

Ή και πιο συνοπτικά
$$f^{(10)}(x) = -\frac{1}{2}x^2\cos x + 10x\sin x + 45\cos x$$

ΘΕΜΑ Α–5 (20 μονάδες): Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα
$$I = \int \frac{4x\ \mathrm{d}x}{9(x^2+2x+5)}$$

Παρατήρηση:

Το ολοκλήρωμα γράφεται λίγο διαφορετικά ως εξής
$$I = \frac{4}{9}\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$$
και είναι μια απειροελάχιστη παραλλαγή της άσκησης 2 στην σελίδα 385 του βιβλίου [2], δηλαδή διαφέρει μόνο ως προς τον συντελεστή 4/9 που πολλαπαλασιάζει το ολοκλήρωμα.

ΛΥΣΗ:

Η διακρίνουσα του παρονομαστή είναι $\Delta = \beta^2 + 4\alpha\gamma = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = -16$ και άρα το τριώνυμο στον παρονομαστή γράφεται σαν αθροισμα τετραγώνων
$$x^2+2x+5 = (x+1)^2 + 2^2$$

Κάνουμε την αντικατάσταση
$$x+1 = 2t \quad \text{και άρα} \quad dx = 2dt$$

Οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται
$$\begin{aligned}
I &= \frac{4}{9}\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{(x+1)^2+2^2}\\
&= \frac{4}{9}\int \frac{(2t-1)\ 2\mathrm{d}t}{(2t)^2+2^2}\\
&= \frac{4}{9}\int \frac{2(2t-1)\ \mathrm{d}t}{4(t^2+1)}\\
&= \frac{4}{9}\int \frac{\cancel{4}t\ \mathrm{d}t}{\cancel{4}(t^2+1)} - \frac{\cancel{4}}{9}\int \frac{2\mathrm{d}t}{\cancel{4}(t^2+1)}\\
&= \frac{2}{9}\int \frac{2t\ \mathrm{d}t}{t^2+1} - \frac{2}{9}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}
\end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε την έννοια του διαφορικού συνάρτησης για να γράψουμε τον αριθμητή του πρώτου ολοκληρώματος $2t\ \mathrm{d}t$ με την μορφή $\mathrm{d}(t^2+1)$ καθώς και τα βασικά ολοκληρώματα ειδικών συναρτήσεων
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c \quad \text{και} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + c$$

Οπότε το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται διαδοχικά
$$\begin{aligned}
I &= \frac{2}{9}\int \frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{t^2+1} - \frac{2}{9}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\\
&= \frac{2}{9}\ln|t^2+1| - \frac{2}{9}\arctan t + c
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας και πάλι το x μέσω της $t = \frac{1}{2}(x+1)$, το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται τελικά

$$I = \frac{2}{9}\ln\left[\frac{(x+1)^2}{2}+1\right] - \frac{2}{9}\arctan\left[\frac{(x+1)}{2}\right] + c$$

ΘΕΜΑ Α–6 (15 μονάδες): Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+7)\ \mathrm{d}x$$

Παρατήρηση: Το ολοκλήρωμα αποτελεί μια απειροελάχιστη παραλλαγή της άσκησης 13 στην σελίδα 370 του βιβλίου [2], δηλαδή το ολοκλήρωμα διαφέρει από αυτό της άσκησης 13 μόνο ως προς τον παράγοντα 7 ο οποίος στην άσκηση 13 του βιβλίου είναι 5. Η άσκηση είναι κλασσικό παράδειγμα ολοκλήρωσης κατά παράγοντες όπου στο διαφορικό εισάγεται η εκθετική συνάρτηση.

ΛΥΣΗ:

$$\begin{aligned}
I &= \int \mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+7)\ \mathrm{d}x \\
&= -\int (x^2-2x+7)\ \mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} \\
&= -(x^2-2x+7)\ \mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}(x^2-2x+7) \\
&= -(x^2-2x+7)\ \mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\ (2x-2)\mathrm{d}x \\
&= -(x^2-2x+7)\ \mathrm{e}^{-x} + 2\int \mathrm{e}^{-x}\ (x-1)\mathrm{d}x \\
&= -(x^2-2x+7)\ \mathrm{e}^{-x} + 2I_1
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε στην συνέχεια το ολοκλήρωμα $I_1 = \int \mathrm{e}^{-x}\ (x-1)\mathrm{d}x$ χρησιμοποιώντας και πάλι ολοκλήρωση κατά παράγοντες, δηλαδή

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int (x-1)\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = -\int (x-1)\ \mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} = \\
&= -\mathrm{e}^{-x}(x-1) + \int \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}(x-1) \\
&= -\mathrm{e}^{-x}(x-1) + \int \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x \\
&= -\mathrm{e}^{-x}(x-1) - \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(-x) \\
&= -\mathrm{e}^{-x}(x-1) - \mathrm{e}^{-x} + c \\
&= -x\mathrm{e}^{-x} + \cancel{\mathrm{e}^{-x}} - \cancel{\mathrm{e}^{-x}} + c \\
&= -x\mathrm{e}^{-x} + c
\end{aligned}$$

Οπότε για το αρχικό ολοκλήρωμα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} I &= -(x^2-2x+7)\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} + c \\ &= -x^2\mathrm{e}^{-x} + \cancel{2x\mathrm{e}^{-x}} - 7\mathrm{e}^{-x} - \cancel{2x\mathrm{e}^{-x}} + c \end{aligned}$$

Και άρα τελικά βρίσκουμε ότι:

$$I = -\mathrm{e}^{-x}(x^2+7) + c \tag{5}$$

ΘΕΜΑ Α–7 (20 μονάδες): Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{2\alpha^3 \mathrm{d}x}{x^4+\alpha^4+2x^2\alpha^2}$$

Παρατήρηση: Το ολοκλήρωμα είναι μια μικρή παραλλαγή της άσκησης 7 στην σελίδα 147 των σημειώσεων του μαθήματος [1]. Αν χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$ και βγάλουμε την σταθερά $2\alpha^3$ εκτός ολοκληρώματος, το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = 2\alpha^3 \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha^2)^2}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση που πρέπει να ολοκληρωθεί είναι ακριβώς ίδια με αυτή του παραδείγματος 7 όπου αντί του z έχουμε x και αντί του λ έχουμε α .

ΛΥΣΗ:

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, θέτουμε $x=\alpha\tan t$, οπότε διαφορίζοντας βρίσκουμε ότι:

$$\mathrm{d}x = \alpha\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = \alpha(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t\ ,$$

αφού είναι γνωστό ότι

$$(\tan t)' = \frac{\mathrm{d}(\tan t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t\ .$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στο ολοκλήρωμα βρίσκουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} I &= 2\alpha^3 \int \frac{\alpha(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t}{(\alpha^2\tan^2 t+\alpha^2)^2} \\ &= 2\alpha^3 \int \frac{\alpha\cancel{(1+\tan^2 t)}\mathrm{d}t}{\alpha^4(\tan^2 t+1)^{\cancel{2}}} \\ &= 2\cancel{\alpha^4} \int \frac{\mathrm{d}t}{\cancel{\alpha^4}(\tan^2 t+1)} \\ &= 2\int \cos^2 t\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Από την τριγωνομετρία είναι γνωστή η ταυτότητα

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 \quad \text{που γράφεται} \quad \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

οπότε το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}
I &= 2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t \\
&= \cancel{2}\int \frac{1+\cos 2t}{\cancel{2}}\mathrm{d}t \\
&= \int \mathrm{d}t + \int \cos 2t\,\mathrm{d}t \\
&= t + \frac{1}{2}\int \cos(2t)\,\mathrm{d}(2t) \\
&= t + \frac{1}{2}\sin 2t
\end{aligned}$$

Όμως θα πρέπει να εκφράσουμε το τελικό αποτέλεσμα σαν συνάρτηση της αρχικής μεταβλητής x, οπότε έχουμε οτι:

$$x = \alpha\tan t \quad \text{δηλαδή} \quad \tan t = \frac{x}{\alpha} \qquad \text{και άρα τελικά} \quad t = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

ενώ από την τριγωνομετρία είναι γνωστή η ταυτότητα

$$\sin 2t = \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} \quad \text{που γράφεται} \quad \sin 2t = \frac{2(\frac{x}{\alpha})}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} = \frac{2\alpha x}{x^2+\alpha^2}$$

Αρα το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται διαδοχικά

$$I = t + \frac{1}{2}\sin 2t = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\alpha x}{x^2+\alpha^2} + \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) .$$

Οπότε τελικά το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = 2\alpha^3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha^2)^2} = \frac{\alpha x}{x^2+\alpha^2} + \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) + c$$

ΘΕΜΑ Α–8 (15 μονάδες): Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$. Να υπολογιστεί το μέτρο του και το πρωτεύον του όρισμα. Στην συνέχεια να γραφτεί σε τριγωνομετρική, εκθετική και πολική μορφή και να σχεδιαστεί στο μιγαδικό επίπεδο.

Παρατήρηση: Η άσκηση είναι μια μικρή παραλλαγή της άσκησης 1 στην σελίδα 201 των σημειώσεων του μαθήματος [1]. Τα ζητούμενα είναι ακριβώς τα ίδια όπως και στο λυμένο παράδειγμα, απλά στα θέματα των εξετάσεων ζητήθηκε να υπολογιστούν τα ζητούμενα για διαφορετικούς μιγαδικούς αριθμούς.

ΛΥΣΗ:

Το μέτρο $\rho = |z|$ ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ δίνεται από την σχέση $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ και επομένως για τον μιγαδικό αριθμό της άσκησης έχουμε:

$$\begin{aligned}
\rho &= |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\
&= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} \\
&= \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2
\end{aligned}$$

Δηλαδή το μέτρο του μιγαδικού αριθμού είναι $\rho = 2$.

Γεωμετρικά το πρωτεύον όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ παριστάνει την κυρτή γωνία ϕ που σχηματίζεται από τον θετικό ημιάξονα των x με την διανυσματική ακτίνα OM που συνδέει την αρχή των αξόνων O με το σημείο $M = M(x, y)$ που απεικονίζει τον μιγαδικό αριθμό z στο μιγαδικό επίπεδο.

Αλγεβρικά το πρωτεύον όρισμα ορίζεται να είναι η μοναδική λύση (γωνία ϕ) από τις άπειρες λύσεις του συστήματος των εξισώσεων

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \quad \text{και} \quad \cos\phi = \frac{x}{\rho}$$

η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, και οι οποίες λύσεις διαφέρουν κατά $2\kappa\pi$ με $\kappa \in Z$.

Για να υπολογίσουμε το πρωτεύον όρισμα στην πράξη βρίσκουμε αρχικά την γωνία ϕ για την οποία ισχύει $\tan\phi = \frac{y}{x}$ και μετά ανάλογα με το τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου που βρίσκεται ο z, και το οποίο εξαρτάται απο το πρόσημο των x και y, το πρωτεύον όρισμα $\operatorname{Arg} z$ προκύπτει από τη σχέση $\operatorname{Arg} z = \phi$ ή $\operatorname{Arg} z = \phi \pm \pi$. Η διαδικασία περιγράφεται αναλυτικά στην παρατήρηση στις σελίδες 189-190 των σημειώσεων του μαθήματος [1].

Για να υπολογίσουμε το πρωτεύον όρισμα στην παρούσα άσκηση έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \tan\phi &= \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Από τριγωνομετρικούς πίνακες γνωρίζουμε ότι όταν $\tan\phi = \sqrt{3}/3$ τότε $\phi = 30^o = \frac{\pi}{6}$ ή για να είμαστε πιο ακριβείς $\phi = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ όπου $\kappa = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Επίσης $a = \sqrt{3} > 0$ και $b = 1 > 0$, δηλαδή ο μιγαδικός αριθμός βρίσκεται στο α′ τεταρτημόριο. Επομένως το πρωτεύον όρισμα του παραπάνω μιγαδικού αριθμού είναι $\operatorname{Arg} z = \phi = 30^o = \pi/6$

Οπότε ο μιγαδικός αριθμός που έχει δοθεί σε αλγεβρική ή αλλιώς καρτεσιανή μορφή $z = a + ib = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ μπορεί να πάρει και τις εξής διαφορετικές μορφές:

1. Πολική μορφή $z = 2 < 30^o = 2 < \frac{\pi}{6}$
2. Εκθετική μορφή $z = 2\exp(i30^o) = 2\mathrm{e}^{i30^o} = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$
3. Τριγωνομετρική $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$