

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Υπολογισμός χωρητικότητας καναλιού για συμμετρικό δυαδικό κανάλι σε συνάρτηση με το λόγο ενέργειας ανά bit προς τη φασματική πυκνότητα θορύβου του καναλιού για διαμόρφωση BPSK

2.1 Σκοπός της άσκησης

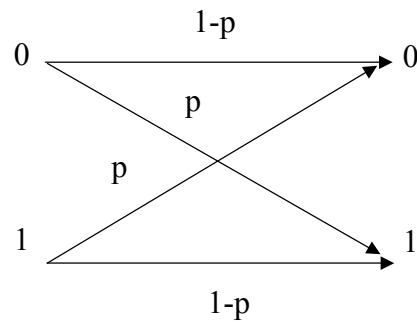
Σκοπός της άσκησης είναι να υπολογιστεί και να αναπαρασταθεί η χωρητικότητα συμμετρικού δυαδικού καναλιού για την περίπτωση διαμόρφωσης BPSK σε συνάρτηση με το λαμβανόμενο λόγο της ενέργειας ανά bit προς τη φασματική πυκνότητα του θορύβου του καναλιού επικοινωνίας.

2.2 Θεωρητικό μέρος

Η *χωρητικότητα καναλιού* (channel capacity) εξ ορισμού είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης δεδομένων με αξιοπιστία σε ένα κανάλι επικοινωνίας, [5]. Αξιοπίστη μετάδοση δεδομένων σε ένα κανάλι επικοινωνίας, είναι δυνατή όταν μπορεί να βρεθεί ένας κώδικας με ικανοποιητικά μεγάλο μήκος, έτσι ώστε η *πιθανότητα λάθους* (probability of error) να τείνει σε μηδενική τιμή όταν το μήκος του κώδικα αυξάνεται συνεχώς, [6-9]. Η χωρητικότητα καναλιού συμβολίζεται συνήθως με C (με μονάδες bits/sec) και ρυθμοί μετάδοσης δεδομένων R (bits/sec) με αξιοπιστία στο κανάλι είναι δυνατοί, μόνο όταν ισχύει:

$$R < C \quad (2.1)$$

Γενικά, με τη χρησιμοποίηση ενός καναλιού επικοινωνίας εκπέμπουμε το σήμα πληροφορίας προς έναν ή περισσότερους προορισμούς. Το σήμα πληροφορίας κατά την εκπομπή του στο κανάλι, υπόκειται σε ντετερμινιστικές ή όχι αλλαγές. Για παράδειγμα ντετερμινιστικές αλλαγές είναι η *εξασθένηση* (attenuation), η *γραμμική και μη γραμμική παραμόρφωση* (linear and non-linear distortion) κ.α. Αλλαγές στο σήμα πληροφορίας κατά τη μετάδοσή του μπορεί να περιγράφονται πιθανοκρατικά, όπως για παράδειγμα η πρόσθεση *θορύβου* (noise), οι *διαλείψεις πολυδιόδευσης* (multipath fading) κ.α., [5]. Δεδομένου ότι οι ντετερμινιστικές αλλαγές μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις τυχαίων αλλαγών, το κανάλι επικοινωνίας στη γενική περίπτωση περιγράφεται από τη σχέση μεταξύ των σημάτων εισόδου και των σημάτων εξόδου. Στην απλούστερη περίπτωση, το κανάλι επικοινωνίας μοντελοποιείται ως μία υπό συνθήκη πιθανότητα μεταξύ της εισόδου του καναλιού και της εξόδου του καναλιού. Ένα τέτοιο μοντέλο καναλιού ονομάζεται *διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη* (Discrete Memoryless Channel, DMC) και περιγράφεται από το αλφάβητο (σύνολο συμβόλων) της εισόδου X , το αλφάβητο (σύνολο συμβόλων) της εξόδου Y και τον *πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης* (channel transition probability matrix) $p(x|y)$, δεδομένων όλων των $x \in X$ και $y \in Y$. Ειδική περίπτωση του διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη, είναι το *δυαδικό συμμετρικό κανάλι* (Binary Symmetric Channel, BSC). Το συμμετρικό δυαδικό κανάλι αντιστοιχεί στην περίπτωση στην οποία εκπέμπονται μόνο δύο σύμβολα εισόδου, τα 0 και 1, δηλαδή $X = Y = \{0, 1\}$ και $p(y=0|x=1) = p(y=1|x=0) = p$ (*πιθανότητα λάθους στο εκπεμπόμενο σύμβολο*) (crossover probability). Σχηματικά, το δυαδικό συμμετρικό κανάλι παρουσιάζεται στην επόμενη εικόνα 2.1.



Εικόνα 2.1 Αναπαράσταση δυαδικού συμμετρικού καναλιού (BSC).

Για την περίπτωση ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού, η χωρητικότητα καναλιού δίνεται από τη σχέση:

$$C = 1 - H_{\text{πηγή χωρίς μνήμη}}(p) \quad (2.2)$$

όπου p είναι η πιθανότητα λάθους (crossover probability) στο εκπεμπόμενο σύμβολο (δυαδικό) και $H_{\text{πηγή χωρίς μνήμη}}(p)$ είναι η εντροπία της πηγής πληροφορίας. Για την περίπτωση της δυαδικής διαμόρφωσης BPSK, η πιθανότητα λάθους p συνδέεται με το λόγο γ ενέργειας ανά bit E_b προς τη φασματική πυκνότητα θορύβου (noise spectral density) του προσθετικού λευκού και κατανομής Gauss θορύβου (Additive White Gaussian Noise, AWGN) του καναλιού N_0 (energy per bit per N_0), [5,10], με τη σχέση:

$$p = Q(\sqrt{2\gamma}) = \frac{1}{2} \cdot \text{erfc}(\sqrt{\gamma}) \quad (2.3)$$

όπου στη σχέση (2.3), $\text{erfc}(x)$ είναι η συνάρτηση λάθους (Error Function), [5,10,11], και $Q(x)$ είναι η παρακάτω συνάρτηση (ολοκλήρωμα):

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (2.4)$$

Η σχέση (2.3) προκύπτει χρησιμοποιώντας την ιδιότητα μεταξύ των $Q(x)$ και $\text{erfc}(x)$:

$$Q(\sqrt{2}x) = \frac{\text{erfc}(x)}{2} \quad (2.5)$$

Η φασματική πυκνότητα θορύβου του καναλιού N_0 , περιγράφει το μέγεθος της ισχύος του καναλιού επικοινωνίας AWGN και δίνεται σε (Watt/Hz) για ένα συγκεκριμένο κανάλι. Θα πρέπει να επισημωθεί ότι προσθετικός λευκός θόρυβος Gauss είναι ο θόρυβος ο οποίος προστίθεται στο στιγμιαίο πλάτος του εκπεμπομένου σήματος, παρουσιάζει ισοκατανομή της ισχύος σε όλες τις συχνότητες (λευκός θόρυβος) και οι στιγμιαίες τιμές του πλάτους του ακολουθούν την κατανομή Gauss (κανονική κατανομή), [10].

2.3 Εργαστηριακό μέρος

Να γράψετε στο MATLAB πρόγραμμα υπολογισμού και αναπαράστασης της χωρητικότητας συμμετρικού δυαδικού καναλιού σε συνάρτηση με το λόγο $\gamma = \frac{E_b}{N_0}$ της ενέργειας ανά bit E_b προς τη φασματική πυκνότητα θορύβου του καναλιού N_0 .

Πρόγραμμα

```
echo off
gamma_db=[-20:1:20];
gamma=10.^(gamma_db/10);
for i=1:41
e(i)=0.5*erfc(sqrt(gamma(i)));
H(i)=-log2(e(i))*(e(i))-log2(1-e(i))*(1-e(i));
c(i)=1-H(i);
end
pause % Press a key to see a plot of channel capacity versus SNR/bit
clf
semilogx(gamma, c), grid on;
xlabel ('Energy per bit per noise spectral efficiency for BPSK');
ylabel('Channel Capacity of BSC for BPSK modulation');
```

Εξήγηση Προγράμματος

Κατ αρχήν είναι αναγκαίο να ορίσουμε τη μεταβλητή $\gamma = \frac{E_b}{N_0}$. Στη μεταβλητή γ δίνουμε τιμές σε dB, από -20dB έως 20dB με βήμα αύξησης ίσο με 1 (πρόκειται για ενδεικτικές τιμές). Αυτό πραγματοποιείται μέσω της εντολής:

$$\text{gamma_db}=[-20:1:20]; \quad (2.6)$$

Στη διαδικασία υπολογισμού της χωρητικότητας του δυαδικού συμμετρικού καναλιού, η μεταβλητή γ θα πρέπει να είναι καθαρός αριθμός. Έτσι μετατρέπουμε τη μεταβλητή γ από την έκφραση της σε dB σε καθαρό αριθμό με την παρακάτω εντολή:

$$\text{gamma}=10.^(\text{gamma_db}/10); \quad (2.7)$$

διότι ισχύει:

$$\gamma \text{ (καθαρός αριθμός)} = 10^{\frac{\gamma(\text{dB})}{10}} \quad (2.8)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2.3), θα πρέπει να υπολογιστεί η πιθανότητα p , στο εκπεμπόμενο σύμβολο. Αυτό γίνεται στο πρόγραμμα με τη βοήθεια της εντολής:

$$e(i)=0.5*erfc(sqrt(gamma(i))); \quad (2.9)$$

στην οποία η πιθανότητα p δίνεται από τη μεταβλητή e . Η συνάρτηση λάθους στο MATLAB δίνεται από την έκφραση $erfc(x)$.

Στη συνέχεια η εντροπία της πηγής πληροφορίας χωρίς μνήμη υπολογίζεται μέσω της εντολής:

$$H(i)=-\log_2(e(i))*(e(i))-\log_2(1-e(i))*(1-e(i)); \quad (2.10)$$

δεδομένης της σχέσης (1.2). Ο υπολογισμός της χωρητικότητας C του δυαδικού συμμετρικού καναλιού πραγματοποιείται με τη βοήθεια της εντολής:

$$c(i)=1-H(i); \quad (2.11)$$

Για κάθε τιμή του λόγου γ θα πρέπει να υπολογίζεται μία αντίστοιχη τιμή της χωρητικότητας του καναλιού C . Για να επιτευχθεί αυτό είναι απαραίτητος ένας βρόχος επανάληψης στον οποίο θα υπολογίζεται ένα συγκεκριμένο πλήθος τιμών (στο πρόγραμμα που παρουσιάστηκε προηγούμενα το πλήθος αυτό είναι 41 ($i=1:41$)).

Η γραφική παράσταση παρουσιάζεται μετά από το πάτημα (press) οποιοδήποτε κουμπιού μέσω της εντολής:

$$\text{pause \% Press a key to see a plot of channel capacity versus SNR/bit} \quad (2.12)$$

Η γραφική παράσταση παροσιάζεται έτσι στη συνέχεια δίνοντας με τις δύο επόμενες εντολές, ονομασίες στους δύο άξονες:

$$\begin{aligned} \text{xlabel('Energy per bit per noise spectral efficiency for BPSK');} \\ \text{ylabel('Channel Capacity of BSC for BPSK modulation');} \end{aligned} \quad (2.13)$$

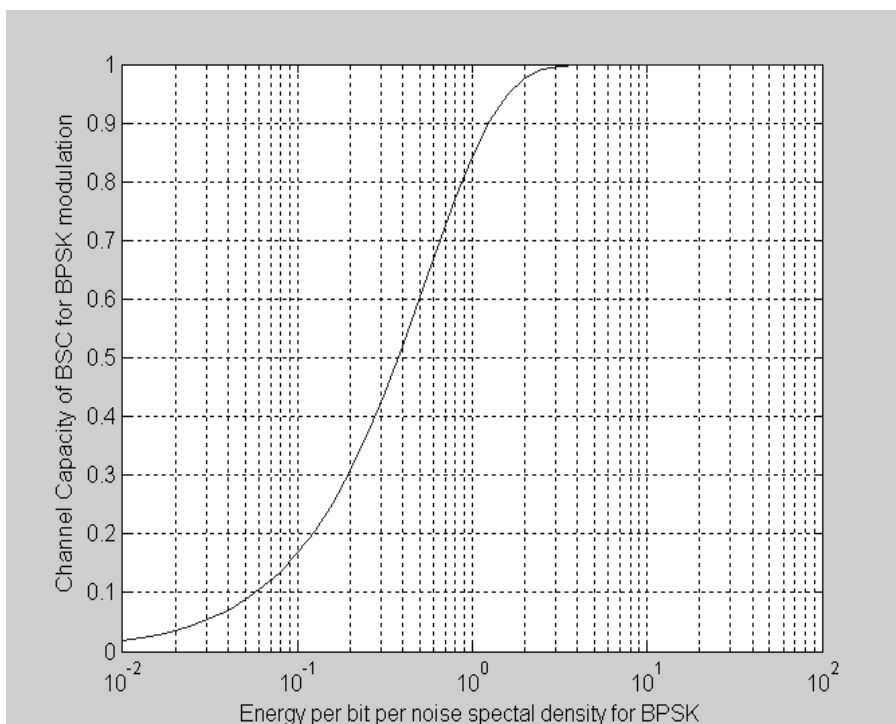
Προηγουμένως έχουμε απαιτήσει ο άξονας x να είναι λογαριθμικός μέσω της εντολής:

$$\text{semilogx(gamma, c), grid on;} \quad (2.14)$$

Με την προηγούμενη εντολή, επίσης, έχουμε ζητήσει από το MATLAB να εμφανίσει “πλέγμα” (*grid on*) στην γραφική παράσταση που θα παραχθεί.

Έξοδος προγράμματος

Η έξοδος του προγράμματος που αναλύθηκε προηγουμένως, στο MATLAB, παρουσιάζεται στην επόμενη εικόνα 2.1.



Εικόνα 2.1 Χωρητικότητα δυαδικού συμμετρικού καναλιού σε συνάρτηση με το λόγο γ (ενέργεια ανά bit προς φασματική πυκνότητα θορύβου του καναλιού) (Έξοδος από εκτέλεση του προγράμματος στο MATLAB) για την περίπτωση BPSK διαμόρφωσης.

2.4 Πρόσθετες εργασίες

1. Δικαιολογήστε μετά την εκτέλεση της άσκησης, τη μέγιστη τιμή την οποία λαμβάνει η χωρητικότητα καναλιού του δυαδικού συμμετρικού καναλιού.
2. Να γράψετε πρόγραμμα στο MATLAB το οποίο θα υπολογίζει και θα αναπαρασταίνει τη χωρητικότητα καναλιού ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού σε συνάρτηση με την πιθανότητα λάθους p στο εκπεμπόμενο σύμβολο (bit) (crossover probability) με δεδομένο ότι $0 \leq p \leq 1$. Για ποια τιμή του p η χωρητικότητα καναλιού είναι ελάχιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της χωρητικότητας του καναλιού; Δικαιολογήστε αναλυτικά την απάντησή σας.