

ΑΣΚΗΣΗ 4^η

Υπολογισμός χωρητικότητας καναλιού για κανάλι περιορισμένου εύρους ζώνης με προσθετικό, λευκό θόρυβο κατανομής Gauss

4.1 Σκοπός της άσκησης

Σκοπός της άσκησης είναι να υπολογιστεί και να αναπαρασταθεί η χωρητικότητα ενός καναλιού επικοινωνίας *περιορισμένου εύρους ζώνης συχνοτήτων* (bandlimited channel) σε συνάρτηση με το εύρος ζώνης του καναλιού και με το λόγο σήμα προς θόρυβο (Signal-to-Noise Ratio) στην έξοδο του καναλιού. Ο θόρυβος του καναλιού επικοινωνίας θεωρείται λευκός, προσθετικός, θόρυβος Gauss δηλαδή θεωρούμε κανάλι επικοινωνίας AWGN.

4.2 Θεωρητικό μέρος

Για την περίπτωση ενός καναλιού επικοινωνίας, εκτός από το μοντέλο του δυαδικού συμμετρικού καναλιού, ένα ενδιαφέρον μοντέλο καναλιού που συναντάται στην πράξη συνεχώς είναι το μοντέλο του καναλιού περιορισμένου εύρους ζώνης συχνοτήτων στο οποίο η εκπεμπόμενη ισχύς του σήματος παρουσιάζει ένα πάνω όριο (περιορισμός της ισχύος εκπομπής σε μία μέγιστη τιμή) και ο θόρυβος είναι AWGN θόρυβος, [10]. Αν υποθεθεί ότι ο θόρυβος έχει φασματική πυκνότητα N_0 , η εκπεμπόμενη ισχύς είναι ίση με P και το εύρος ζώνης συχνοτήτων είναι W τότε ο C.Shannon, θεωρούμενος πατέρας της θεωρίας πληροφορίας και παγκοσμίως γνωστός μαθηματικός και ερευνητής [6,7], απέδειξε τη σημαντικότερη επόμενη έκφραση για τη χωρητικότητα C (σε bits/sec) του συγκεκριμένου καναλιού επικοινωνίας:

$$C = W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 \cdot W} \right) \quad (4.1)$$

Αποδεικνύεται, ότι όταν ο λόγος $\frac{P}{N_0}$ τείνει στο άπειρο, τότε και η χωρητικότητα του καναλιού C τείνει στο άπειρο δηλαδή η αύξηση της ισχύος εκπομπής μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση του ρυθμού εκπομπής των δεδομένων (σε bits/sec). Αντίστοιχα, όταν το εύρος ζώνης του καναλιού W , τείνει στο άπειρο η χωρητικότητα του καναλιού C τείνει σε συγκεκριμένη τιμή η οποία προσδιορίζεται από το λόγο $\frac{P}{N_0}$, όπως φαίνεται από την επόμενη σχέση, [5,11]:

$$\lim_{W \rightarrow \infty} C = \lim_{W \rightarrow \infty} W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 \cdot W} \right) = \frac{P}{N_0 \cdot \ln 2} = 1.4427 \cdot \frac{P}{N_0} \quad (4.2)$$

δηλαδή η αύξηση του εύρους συχνοτήτων του καναλιού απεριόριστα δενοδηγεί σε αντίστοιχη αύξηση του ρυθμού εκπομπής δεδομένων.

4.3 Εργαστηριακό μέρος

1. Να γράψετε στο MATLAB πρόγραμμα υπολογισμού και αναπαράστασης της χωρητικότητας καναλιού C με εύρος ζώνης συχνοτήτων $W=3000\text{Hz}$ σε συνάρτηση με το λόγο $\frac{P}{N_0}$ (να δώσετε τιμές στο λόγο $\frac{P}{N_0}$ από -20 έως 30dB)(θεωρείστε τη σχέση (4.1).

2. Να γράψετε στο MATLAB πρόγραμμα υπολογισμού και αναπαράστασης της χωρητικότητας καναλιού C με λόγο $\frac{P}{N_0}$ ίσο με 25dB σε συνάρτηση με το εύρος ζώνης συχνοτήτων του καναλιού W .

Πρόγραμμα

```
echo on

pn0_db=[-20:0.1:30];

pn0=10.^(pn0_db./10);

capacity=3000.*log2(1+pn0/3000);

pause % Press a key to see a plot of channel capacity versus P/N0

clf

semilogx(pn0, capacity)

title('Capacity vs P/N0 in an AWGN channel')
xlabel('P/No');
ylabel('Channel Capacity (bits/second)');
clear
w=[1:10,12:2:100,105:5:500, 510:10:5000,5025:25:20000,20050:50:100000];
pn0_db=25;
pn0=10.^(pn0_db./10);
capacity=w.*log2(1+pn0./w);
pause % Press a key to see a plot of channel capacity versus bandwidth

clf

semilogx(w, capacity), grid on;
title('Capacity vs bandwidth in an AWGN channel')

xlabel('Bandwidth (Hz)');
ylabel('Channel Capacity (bits/second)');
```

Εξήγηση Προγράμματος

Στην αρχή του προγράμματος ορίζουμε το λόγο $\frac{P}{N_0}$ με τη βοήθεια της εντολής:

$$\text{pn0_db}=[-20:0.1:30]; \quad (4.3)$$

Στη μεταβλητή $pn0_db$ δίνουμε τιμές από -20 έως 30 dB (σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης). Στη συνέχεια προχωράμε με την επόμενη εντολή, στη μετατροπή των τιμών της μεταβλητής $pn0_db$ σε καθαρό αριθμό διότι στη σχέση (4.1) ο λόγος $\frac{P}{N_0}$ πρέπει να είναι εκφρασμένος σε καθαρό αριθμό:

$$pn0=10.^(pn0_db./10); \quad (4.4)$$

Η χωρητικότητα (capacity) του καναλιού εύρους ζώνης $W=3000$ Hz, υπολογίζεται με την επόμενη εντολή:

$$capacity=3000.*\log2(1+pn0/3000); \quad (4.5)$$

εφαρμόζοντας άμεσα τη σχέση (4.1).

Στη συνέχεια με το πάτημα ενός κουμπιού (*pause % Press a key to see a plot of channel capacity versus P/N0*) εμφανίζεται η γραφική παράσταση της χωρητικότητας C του AWGN καναλιού (εκφρασμένη σε bits/sec) σε συνάρτηση με το λόγο $\frac{P}{N_0}$ για την περίπτωση που το εύρος ζώνης του καναλιού είναι ίσο με $W=3000$ Hz (εικόνα 4.1). Η γραφική παράσταση έχει τον άξονα x λογαριθμικό μέσω της εντολής:

$$\text{semilogx}(pn0, \text{capacity}) \quad (4.6)$$

ενώ η όλη γραφική παράσταση (εικόνα 4.1) έχει τίτλο (*title*) με τη βοήθεια της εντολής:

$$\text{title}(\text{'Capacity vs P/N0 in an AWGN channel'}) \quad (4.7)$$

Στους δύο άξονες x και y, δίνουμε αντίστοιχες ονομασίες μέσω των εντολών:

$$\begin{aligned} & \text{xlabel}(\text{'P/N0'}); \\ & \text{ylabel}(\text{'Channel Capacity (bits/second)'}); \end{aligned} \quad (4.8)$$

Μετά από τη συγκεκριμένη έξοδο του προγράμματος, είναι απαραίτητο όλες οι μεταβλητές που έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί να πάρουν την τιμή 0. Αυτό πετυχαίνεται με την εντολή:

$$\text{Clear} \quad (4.9)$$

Έτσι στη συνέχεια προχωρούμε στη πραγματοποίηση της γραφικής παράστασης της χωρητικότητας C του AWGN καναλιού σε συνάρτηση με το εύρος ζώνης συχνοτήτων W του καναλιού. Έτσι δίνουμε αρχικά τιμές στο W με την εντολή:

$$w=[1:10,12:2:100,105:5:500, 510:10:5000,5025:25:20000,20050:50:100000]; \quad (4.10)$$

Από την εκφώνηση της άσκησης πρέπει να είναι: $\frac{P}{N_0}=25$ dB. Έτσι με τις επόμενες δύο εντολές δίνουμε αυτή τη τιμή στο λόγο $\frac{P}{N_0}$ και τον μετατρέπουμε σε καθαρό αριθμό όπως απαιτεί η σχέση (4.1):

$$pn0_db=25; \quad (4.11)$$

$$pn0=10.^(pn0_db./10);$$

Ο υπολογισμός της χωρητικότητας C του καναλιού πραγματοποιείται μέσω της εντολής:

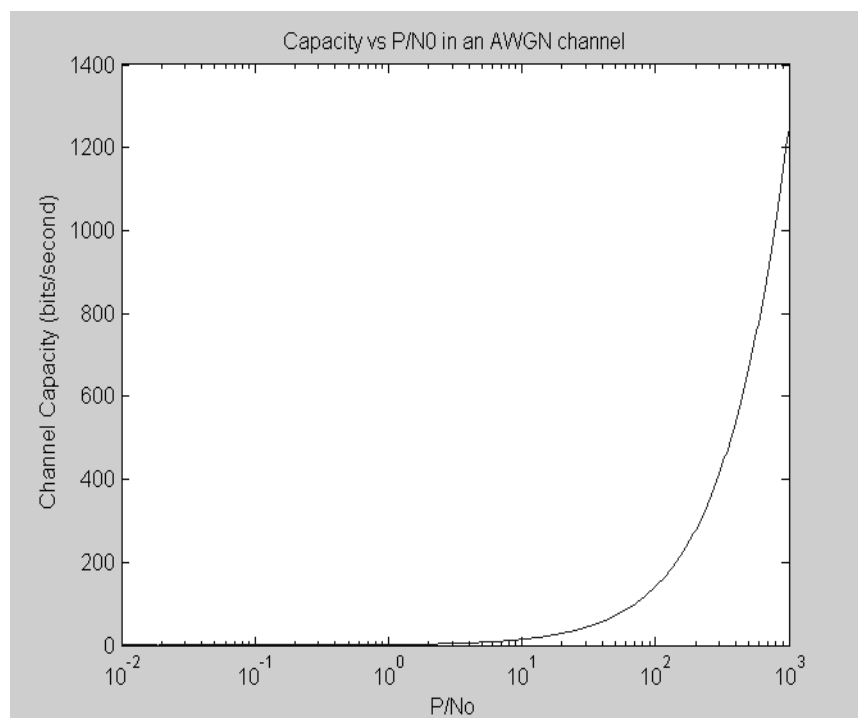
$$capacity=w.*\log2(1+pn0./w); \quad (4.12)$$

ενώ με το πάτημα ενός κουμπιού (*pause % Press a key to see a plot of channel capacity versus bandwidth*) λαμβάνουμε την αντίστοιχη έξοδο (εικόνα 4.2). Ο άξονας x ζητάμε να είναι λογαριθμικός και θέτουμε *ονομασίες (label)* στους άξονες και *τίτλο (title)* στη γραφική παράσταση μέσω των επόμενων εντολών:

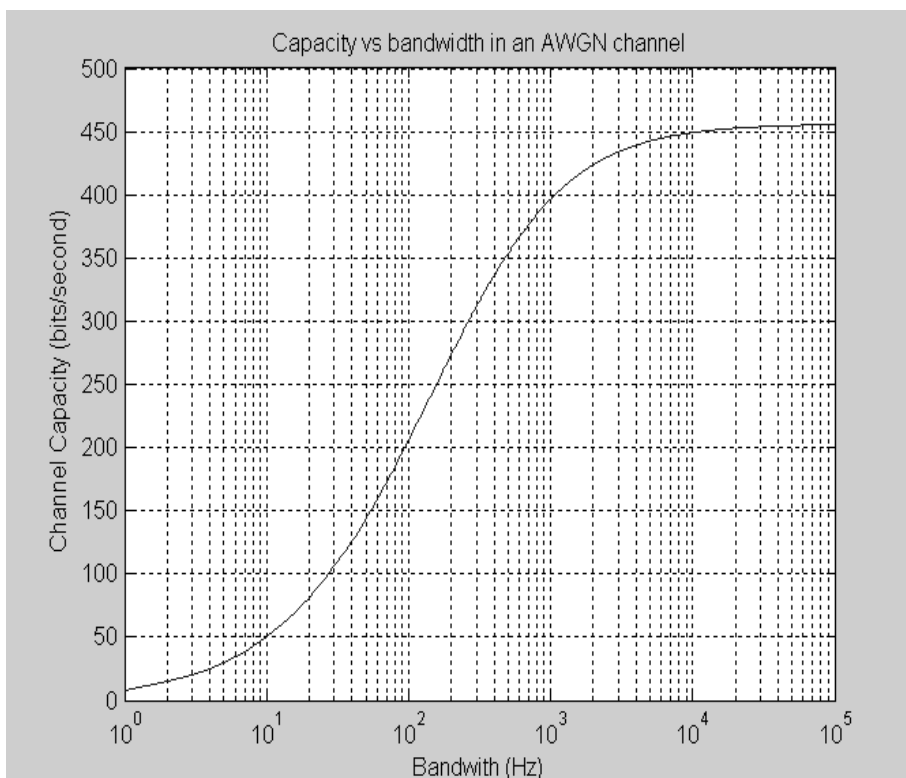
$$\begin{aligned} & \text{semilogx}(w, \text{capacity}), \text{grid on}; \\ & \text{title}(\text{'Capacity vs bandwidth in an AWGN channel'}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} & \text{xlabel}(\text{'Bandwidth (Hz)'}); \\ & \text{ylabel}(\text{'Channel Capacity (bits/second)'}); \end{aligned}$$

Έξοδος προγράμματος



Εικόνα 4.1 Χωρητικότητα (channel capacity) (σε bits/sec) AWGN καναλιού περιορισμένου εύρους ζώνης σε συνάρτηση με το λόγο $\frac{P}{N_0}$ (εκπεμπόμενη ισχύς προς φασματική πυκνότητα θορύβου του καναλιού επικοινωνίας) για εύρος ζώνης του καναλιού ίσο με $W=3000\text{Hz}$ (Έξοδος από εκτέλεση του προγράμματος στο *MATLAB*).



Εικόνα 4.2 Χωρητικότητα (channel capacity) AWGN καναλιού (σε bits/sec) περιορισμένου εύρους ζώνης σε συνάρτηση με το εύρος ζώνης του καναλιού (Bandwidth) (σε Hz) για $\frac{P}{N_0}=25\text{dB}$ (Εξοδος από εκτέλεση του προγράμματος στο MATLAB).

4.4 Πρόσθετες εργασίες

1. Ποια η χωρητικότητα καναλιού ενός AWGN καναλιού επικοινωνίας εύρους ζώνης συχνοτήτων 5000 Hz με λόγο $\frac{P}{N_0}=25\text{dB}$;
2. Ποια η χωρητικότητα AWGN καναλιού με λόγο $\frac{P}{N_0}=30\text{ dB}$ και εύρος ζώνης ίσο με $W=3000\text{ Hz}$;
3. Εξηγείστε αναλυτικά το παρακάτω πρόγραμμα, μετά την εκτέλεσή του, όπως και την αντίστοιχη έξοδό του στο MATLAB:

Πρόγραμμα

```

echo off
w=[1:5:20,25:20:100,130:50:300,400:100:1000,1250:250:5000,5500:500:10000];
pn0_db=[-20:1:30];
pn0=10.^(pn0_db./10);
for i=1:45
    for j=1:51
        c(i,j)=w(i)*log2(1+pn0(j)/w(i));
    end
end
echo on
k=[0.9,0.8,0.5,0.6];
s=[-70,35];

```

```
surf(w,pn0_db,c',s, k)
title('capacity vs.bandwidth and SNR')
```

4. Να αποδείξετε με μαθηματικό τρόπο τη σχέση (4.2) (σας δίνεται ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$).